$- \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$- \int \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \sin mx$

$- \int \sin mx \, dx = \frac{-1}{m} \cos mx$

$- \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

$- \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$

$- \int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx}$

$- \int \operatorname{sh} mx \, dx = \frac{1}{m} \operatorname{ch} mx$

$- \int \operatorname{ch} mx \, dx = \frac{1}{m} \operatorname{sh} mx$

$- \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$

$- \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

$- \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$

$- \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right)$

$- \int f'(x) \, (f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$

معادلات تفاضلية 2

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

- $\int \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \sin mx$

- $\int \sin mx \, dx = \frac{-1}{m} \cos mx$

- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$

- $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx}$

- $\int \mathrm{sh}\, mx \, dx = \frac{1}{m} \mathrm{ch}\, mx$

- $\int \mathrm{ch}\, mx \, dx = \frac{1}{m} \mathrm{sh}\, mx$

- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$

- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

- $\int f'(x) (f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$

$$-\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$-\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x))$$

- $\sqrt{x^2+a^2}$; $x = a\tan t$, $x = a\,\text{sh}\,t$ — $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
- $\sqrt{x^2-a^2}$; $x = a\,\text{ch}\,t$, $x = \frac{a}{\sin t}$
- $\sqrt{a^2-x^2}$; $x = a\sin t$

Example: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sin^2\sqrt{x}}$

$t = \sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow 2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{2dt}{\sin^2 t} = -2\cot t = -2\cot\sqrt{x}$

$\int \frac{e^{-x}}{\cos^2 e^{-x}}\,dx$

$t = e^{-x} \Rightarrow dt = -e^{-x}\,dx$

$-dt = e^{-x}\,dx$

$= -\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\tan t = -\tan e^{-x} + C$

/ /

$\int \frac{1 + \ln x}{x(1 - \ln x)} dx$

$t = \ln x$

$dt = \frac{1}{x} dx$

$\int \frac{1+t}{1-t} dt$

- اذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام فنقسم البسط على المقام

$$\begin{array}{r} -1 \\ 1-t \enclose{longdiv}{1+t} \\ \underline{\pm 1 \mp t} \\ 2 \end{array}$$

$\int \left(-1 + 2 \frac{1}{1-t}\right) dt$

$= -t - 2 \ln(1-t)$

$= -\ln x - 2\ln(1 - \ln x)$

$\int a^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

$x = a \sin t$

$dx = a \cos t \, dt$

$\int a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t \, dt$

$a^4 \int \sin^2 t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \, dt$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t}$

$a^4 \int \sin^2 t \cdot \cos^2 t \, dt$

$a^4 \int (\sin t \cdot \cos t)^2 dt$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$

$a^4 \int (\frac{1}{2}\sin 2t)^2 dt = \frac{a^4}{4}\int \sin^2 2t \, dt$

$\sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2}$

$\cos^2 mx = \frac{1+\cos 2mx}{2}$

$\frac{a^4}{4}\int \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{a^4}{4}[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\sin 4t]$

* المعادلة التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة الأولى

أمثال $1y' + f(x)y = g(x)$

$M = e^{\int f(x) dx}$

نضرب الطرفين بعامل التكامل M

$[My]' = g(x) M \Rightarrow My = \int g(x) M \, dx + C$

$xy' + y = \frac{\ln x}{x}$

$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x^2}$ — (*)

$y^{(n)} \neq y^n$

$y^{(2)} = y'' \neq y^2$

$M = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

$xy' + y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow [xy]' = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow$

$[xy]' = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow xy = \int \frac{(\ln x)}{x} dx + C$

$xy = \frac{(\ln x)^2}{2} + C \Rightarrow y = \frac{(\ln x)^2}{2x} + C\frac{1}{x}$

/ /

- المعادلة التفاضلية الغير متجانسة من الرتبة n :

المعادلة التفاضلية ذات أمثال ثابتة

المعادلة التفاضلية ذات أمثال متغيرة

- المعادلة التفاضلية ذات أمثال متغيرة :

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0 y = F(x) \quad \text{--- (1)}$$

ومنه المعادلة المتجانسة :

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0 y = 0 \quad \text{--- } (*)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1)

$$y = y_h + y_p$$

y_p: الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

y_h: الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (*) :

$$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n$$

- حالة خاصة :

اذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \quad \text{--- } (**)$$

وكان y_1 معلوم

1- طريقة تخفيض الرتبة :

$$y = y_1 \int u \, dx$$

نشتق y عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة نعوض المشتقات في المعادلة (**) وتصبح من الشكل :

$$(\quad) u' + (\quad) u = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة نفصل متحولاتها .

2- طريقة: $y = y_1 u$ نشتق عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة ونعوض في المعادلة وتصبح من الشكل:

$$(\quad)u'' + (\quad)u' = 0$$

$$Z = u' \Rightarrow Z' = u''$$

$$(\quad)Z' + (\quad)Z = 0$$

3- $1y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

طريقة ليوفيل استغرادسكي: و y_1 معلوم

$$y_h = y_1\left[\int \frac{C_1 e^{-\int p(x)dx}}{(y_1)^2}dx + C_2\right]$$

ملاحظة: أمثال y'' يساوي الواحد.

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$(x\sin x + \cos x)y'' - x\cos x\, y' + \cos x\, y = 0$$

إذا كان أنها تملك حلاً خاصاً للمعادلة المتجانسة $y_1 = x$

الحل: طريقة تخفيض الرتبة:

$$y = y_1\int u\,dx = x\int u\,dx$$

$$y' = \int u\,dx + u\cdot x$$

$$y'' = u + u + xu' = 2u + xu'$$

بالتعويض:

$$\Rightarrow 2(x\sin x + \cos x)u + x(x\sin x + \cos x)u' - x^2\cos x\, u$$
$$- x\cos x\int u\,dx + x\cos x\int u\,dx = 0$$

$$\Rightarrow x(x\sin x + \cos x)u' + (2(x\sin x + \cos x) - x^2\cos x)u = 0$$

$$x(x\sin x + \cos x)u' = -(2[x\sin x + \cos x] - x^2\cos x)u$$

$$\frac{u'}{u} = -\frac{2(x\sin x + \cos x)}{x(x\sin x + \cos x)} + \frac{x^2\cos x}{x(x\sin x + \cos x)}$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{-2}{x} + \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x} \quad \int \Rightarrow$$

$$\ln\frac{u}{C} = -2\ln x + \int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}\,dx$$

$f(x) = x\sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x$

$$\ln\frac{u}{C} = \ln x^{-2} + \ln(x\sin x + \cos x)$$

$$\ln\frac{u}{C} = \ln\frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$$

$$u = C\,\frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$$

نفرض $C = 1$

$$u_2 = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$$

$$y_2 = x\int u_2\,dx = x\int \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}\,dx = \int \frac{\sin x}{x}\,dx + \int \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx$

$dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

$$= \int \frac{\sin x}{x}\,dx + \left[-\frac{1}{x}\cos x - \int \frac{\sin x}{x}\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{x}\cos x$$

$y_2 = -\cos x$

ومنه الحل العام للمعادلة :

$y_h = y = A_1 y_1 + A_2 y_2 = A_1 x - A_2 \cos x$

$\Rightarrow \boxed{y_h = A_1 x + A_0 \cos x}$; $A_0 = -A_2$

ط3 : طريقة ليوفيل استغرادسكي :

$$y'' - \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x} y' + \frac{\cos x}{x\sin x + \cos x} y = 0$$

$$y_h = y_1 \left[\int \frac{C_1 e^{-\int P(x)dx}}{(y_1)^2} dx + C_2 \right]$$

$$e^{-\int P(x)\,dx} = e^{+\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}} = e^{\ln x\sin x + \cos x}$$

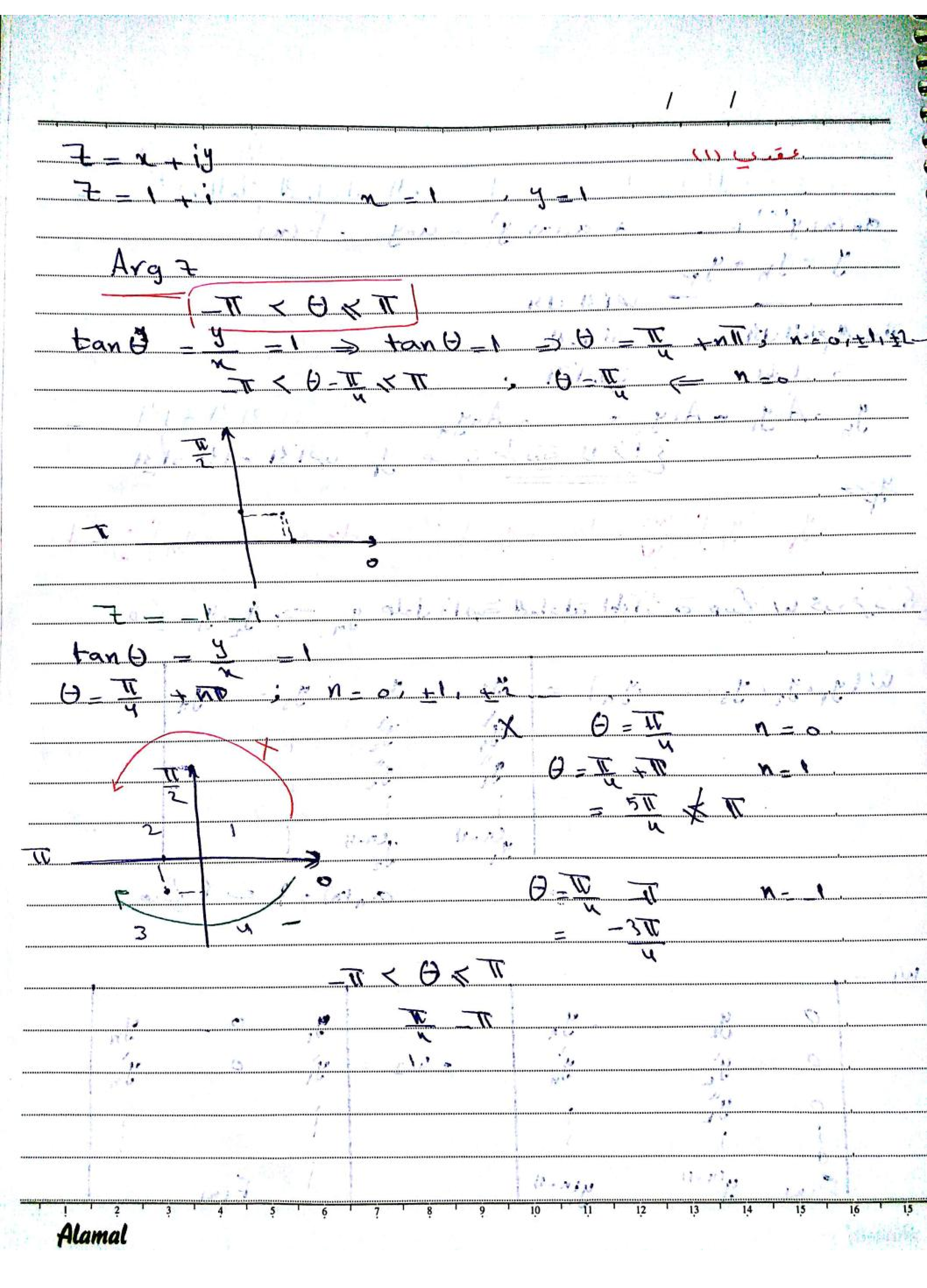
$$= x\sin x + \cos x$$

$$y_h = x\left[C_1 \int \frac{x\sin x + \cos x}{x^2} dx + C_2 \right]$$

$$y_h = x\left[C_1 \left[\frac{-\cos x}{x} \right] + C_2 \right]$$

$$y_h = -C_1 \cos x + x C_2$$

$y_h = C_0 \cos x + x C_2$; $C_0 = -C_1$



عقدي (1)

$z = x + iy$

$z = 1 + i \qquad x = 1 \quad , \; y = 1$

Arg z

$-\pi < \theta \leq \pi$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

$-\pi < \theta = \frac{\pi}{4} \leq \pi \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{4} \Leftarrow n = 0$

$z = -1 - i$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

✗ $\theta = \frac{\pi}{4} \qquad n = 0$

$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi \qquad n = 1$

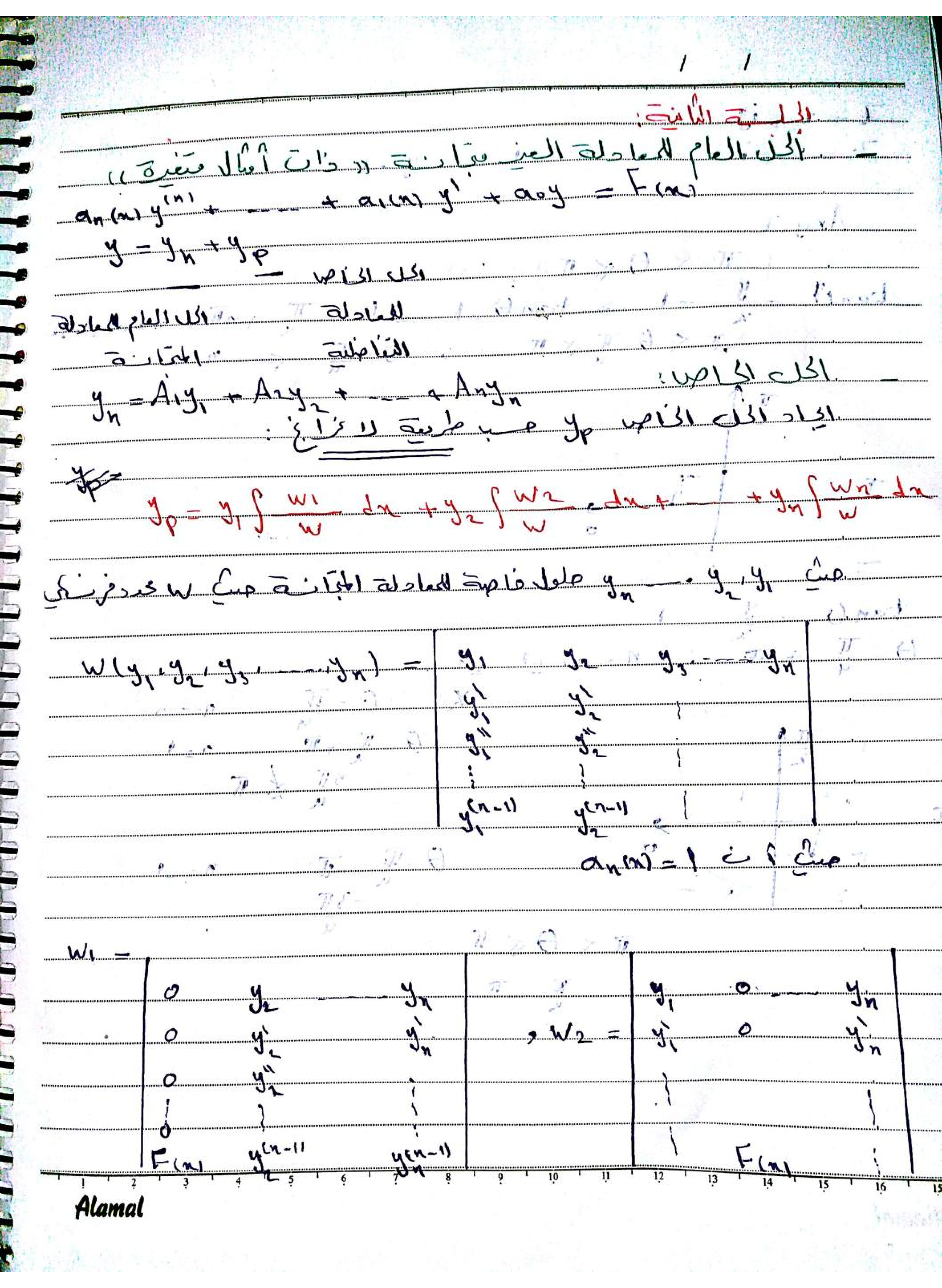
$= \frac{5\pi}{4} \not\leq \pi$

$\theta = \frac{\pi}{4} - \pi \qquad n = -1$

$= -\frac{3\pi}{4}$

$-\pi < \theta \leq \pi$

$\frac{\pi}{4} - \pi$



الحلقة الثانية:

- الحل العام للمعادلة الغير متجانسة ((ذات أمثال متغيرة))

$$a_n(x)\,y^{(n)} + \dots + a_1(x)\,y' + a_0 y = F(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

y_h: الحل العام للمعادلة المتجانسة

y_p: الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

- الحل الخاص:

$$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n$$

إيجاد الحل الخاص y_p حسب طريقة ((لاغرانج)):

$$y_p = y_1 \int \frac{W_1}{W}\,dx + y_2 \int \frac{W_2}{W}\,dx + \dots + y_n \int \frac{W_n}{W}\,dx$$

حيث $y_1, y_2, \dots, y_n$ حلول خاصة للمعادلة المتجانسة حيث W محدد رونسكي

$$W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & \vdots \\ y_1'' & y_2'' & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & \vdots \end{vmatrix}$$

حيث أن $a_n(x) = 1$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & y_2' & & y_n' \\ 0 & y_2'' & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F(x) & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & \dots & y_n \\ y_1' & 0 & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & F(x) & & \vdots \end{vmatrix}$$

Alamal

/ /

- تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة : $4xy'' + 2y' + y = 1$

اذا علمت أنها تملك حلاً خاصاً $y_1 = \sin\sqrt{x}$ للمعادلة المتجانسة

الحل: $y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2$; $y = y_h + y_p$

نأخذ المعادلة المتجانسة

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{4x} y = 0$$

- حسب علاقة ليوفيل + استقراء..

$$y_h = y_1 \left[\int \frac{C_1 e^{-\int P(x)dx}}{(y_1)^2} dx + C_2 \right]$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = e^{\ln x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y_h = \sin\sqrt{x} \left[C_1 \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}} + C_2 \right]$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$y_h = \sin\sqrt{x} \left[2C_1 \int \frac{dt}{\sin^2 t} + C_2 \right]$$

$$y_h = \sin\sqrt{x} \left[-2C_1 \cot\sqrt{x} + C_2 \right]$$

$$y_h = \sin\sqrt{x} \left[C_0 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}} + C_2 \right] \; ; \; C_0 = -2C_1$$

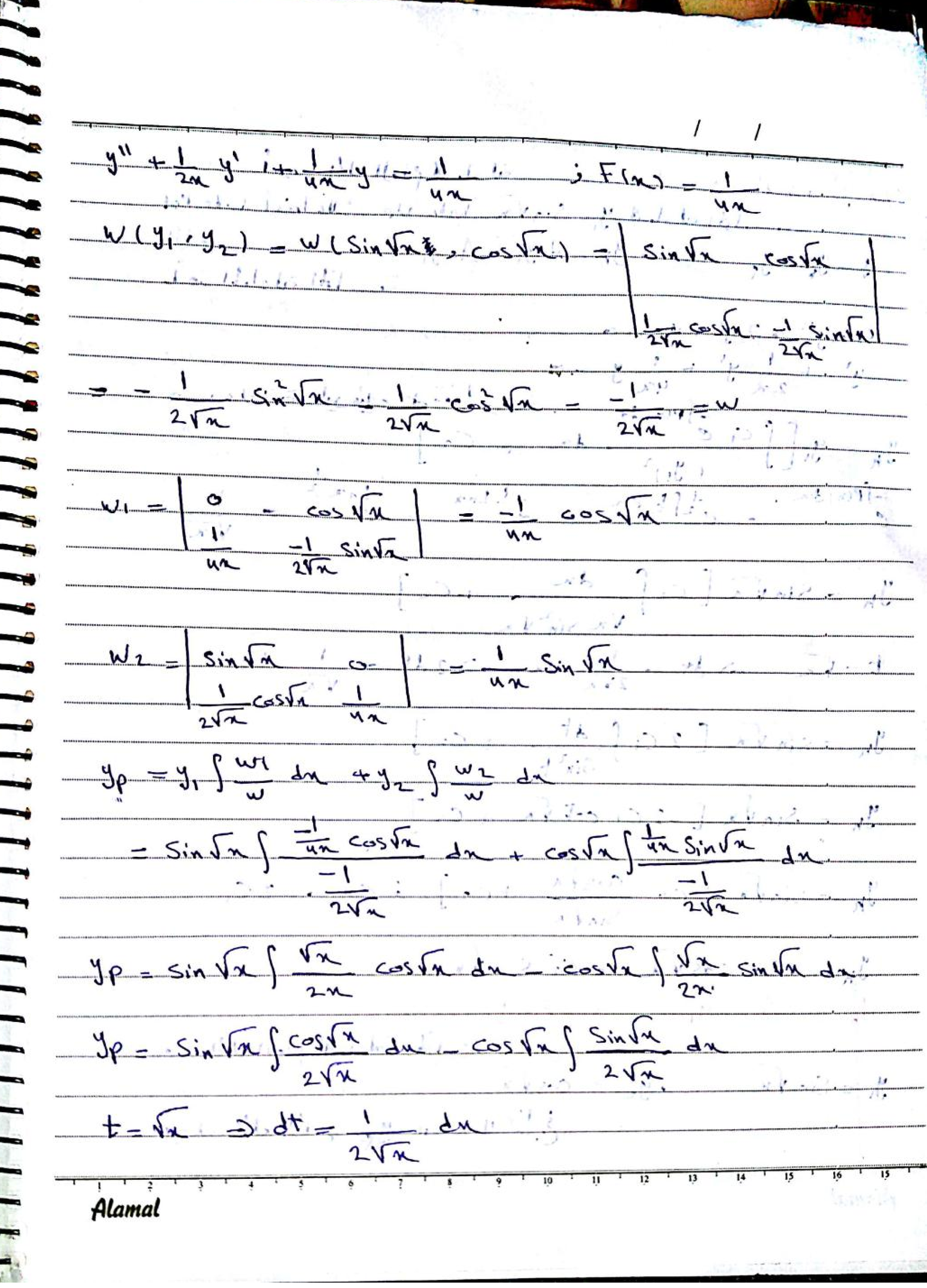
$$y_h = C_0 \cos\sqrt{x} + C_2 \sin\sqrt{x}$$

$$y_h = A\, y_1 + A_2 y_2$$

وهو الحل العام للمعادلة المتجانسة

$y_1 = \sin\sqrt{x}$, $y_2 = \cos\sqrt{x}$

لايجاد الحل الخاص y_p حسب لاغرانج



$$y'' + \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{4x} y = \frac{1}{4x} \quad ; \quad F(x) = \frac{1}{4x}$$

$$W(y_1, y_2) = W(\sin\sqrt{x}, \cos\sqrt{x}) = \begin{vmatrix} \sin\sqrt{x} & \cos\sqrt{x} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} & \frac{-1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin^2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos^2\sqrt{x} = \frac{-1}{2\sqrt{x}} = W$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos\sqrt{x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{-1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} \end{vmatrix} = \frac{-1}{4x}\cos\sqrt{x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \sin\sqrt{x} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} & \frac{1}{4x} \end{vmatrix} = \frac{1}{4x}\sin\sqrt{x}$$

$$y_p = y_1 \int \frac{W_1}{W}\,dx + y_2 \int \frac{W_2}{W}\,dx$$

$$= \sin\sqrt{x} \int \frac{\frac{-1}{4x}\cos\sqrt{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}\,dx + \cos\sqrt{x} \int \frac{\frac{1}{4x}\sin\sqrt{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}\,dx$$

$$y_p = \sin\sqrt{x} \int \frac{\sqrt{x}}{2x}\cos\sqrt{x}\,dx - \cos\sqrt{x} \int \frac{\sqrt{x}}{2x}\sin\sqrt{x}\,dx$$

$$y_p = \sin\sqrt{x} \int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx - \cos\sqrt{x} \int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$y_p = \sin\sqrt{x} \int \cos t \, dt - \cos\sqrt{x} \int \sin t \, dt$

$y_p = \sin^2\sqrt{x} + \cos^2\sqrt{x} = 1$

ومنه الحل العام للمعادلة هو :

$y = y_h + y_p$

$y = c_1 \cos\sqrt{x} + c_2 \sin\sqrt{x} + 1$

طرق التفتيش ((المعادلة المتجانسة))

$P_n(x) y^{(n)} + \dots + P_1(x) y' + P_0(x) y = 0$

1. الحالة الأولى: نفرض

$y = x$ تكون حلاً خاصاً اذا وفقط اذا تحقق :

$P_1(x) + x P_0(x) = 0$

$y = x^2$ ، ، ، ، ، ،

$\frac{2!}{0!} P_2(x) + \frac{2!}{1!} x P_1(x) + \frac{2!}{2!} x^2 P_0(x) = 0$

$y = x^3$ تكون حلاً خاصاً اذا وفقط اذا تحقق :

$\frac{3!}{0!} P_3(x) + \frac{3!}{1!} x P_2(x) + \frac{3!}{2!} x^2 P_1(x) + \frac{3!}{3!} x^3 P_0(x) = 0$

$y = x^4$ ...

2. الحالة الثانية: اذا كانت المعادلة من الشكل :

$P_2(x) y'' + P_1(x) y' + P_0(x) y = 0$

$y = e^{mx}$ تكون حلاً خاصاً اذا وفقط اذا كان

$P_2(x) m^2 + P_1(x) m + P_0(x) = 0$

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ m

نحسب جذور المعادلة :

* اذا كانت الجذور متعلقة بـ x نرفضها
* ، ، ، غير ، بـ x نقبلها .

الحالة الثالثة: $y = \sin x$ نشتقه عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة ثم نعوض المشتقات في المعادلة اذا حققت المعادلة تكون $y = \sin x$ حلاً خاصاً.

الحالة الرابعة: $y = \cos x$

«لبوشيل نستخدم للمعادلة من الرتبة الثانية فقط»

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

حسب طريقة التفتيش:

$$P_3 = x^3, \quad P_2 = -3x^2, \quad P_1 = 6x, \quad P_0 = -6$$

نفرض $y = x$ تكون حلاً خاصاً اذا وفقط اذا كان:

$$P_1(x) + x P_0(x) = 0$$

$$6x + x(-6) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

ومنه $y_1 = x$ حلاً خاصاً.

نفرض $y = x^2$ تكون حلاً خاصاً

$$\frac{2!}{0!} P_2 + \frac{2!}{1!} x P_1 + \frac{2!}{2!} x^2 P_0 = 0$$

$$2(-3x^2) + 2x(6x) + x^2(-6) = 0$$

$$-6x^2 + 12x^2 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

ومنه $y = x^2$ حلاً خاصاً.

نفرض $y = x^3$

$$\frac{3!}{0!} P_3 + \frac{3!}{1!} x P_2 + \frac{3!}{2!} x^2 P_1 + \frac{3!}{3!} x^3 P_0 = 0$$

$$6x^3 + 6x(-3x^2) + 3x^2(6x) + x^3(-6) = 0$$

$$0 = 0$$

ومنه $y_3 = x^3$ حلاً خاصاً.

ومنه الحل العام للمعادلة، (لأن المعادلة متجانسة)

$$y = y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3$$

$$= A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$$

Alamal

/ /

تمرين: أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$

الحل: نوجد الحل العام للتجانسية حسب طريقة التخمين:

نفرض $y = x$ يكون حلاً خاصاً

$P_1(x) + x P_0(x) = 0$

$-(x+1) + 2x = 0 \Rightarrow x - 1 \neq 0$

نفرض $y = e^{mx}$ يكون حلاً خاصاً إذا وفقط إذا كان

$(x-1)m^2 - (x+1)m + 2 = 0$

$xm^2 - m^2 - xm - m + 2 = 0$

$-m^2 - m + 2 + xm^2 - xm = 0$

$-[m^2 + m - 2] + xm[m-1] = 0$

$-(m-1)(m+2) + xm[m-1] = 0$

$(m-1)[-m-2+xm] = 0$

إما: $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

ومنه $y_1 = e^{x}$ حلاً خاصاً

أو

$-m - 2 + xm = 0$

مرفوض $m(-1+x) = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{-1+x}$

نوجد y_2 حسب ليوفيل او ستغرادسكي

$y_2 = y_1 \left[\int \frac{c_1 e^{-\int f(x)dx}}{(y_1)^2} dx + c_2 \right]$; $y_1 = e^{x}$

$f(x) = -\frac{x+1}{x-1}$

$= e^{x} \left[c_1 \int \frac{e^{-\int -\frac{x+1}{x-1} dx}}{e^{2x}} dx + c_2 \right]$

$e^{\int \frac{x+1}{x-1} dx} = e^{\left[\int 1 + \frac{2}{x-1} dx\right]}$;

$\begin{array}{r} 1 \\ x-1 \overline{)\, x+1} \\ \underline{-x \pm 1} \\ 0 + 2 \end{array}$

أعيار طاقة

وزع واحد $= e^{x + 2\ln(x-1)} = e^{x}(x-1)^2$

$y_2 = e^x [c_1 \int e^{-2x} (e^x (x-1)^2) dx + c_2]$

$= e^x [c_1 \int e^{-x} (x^2 - 2x + 1) dx + c_2]$

$= e^x [c_1 \int e^{-x} x^2 dx - 2\int e^{-x} dx + \int e^{-x} dx + c_2]$

$\int e^{-x} x^2 \Rightarrow u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$= x^2 e^{-x} - 2\int x e^{-x} dx$

نعوض بالتكامل

$y_2 = e^x [c_1 (-x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx - 2\int x e^{-x} dx + \int e^{-x} dx + c_2]$

$= e^x [c_1 (-x^2 e^{-x} - e^{-x}) + c_2]$

$= e^x (c_1 e^{-x} (-x^2 - 1) + c_2]$

$= -c_1 (x^2 + 1) + c_2 e^x \quad ; \quad -c_1 = c_0$

$\Rightarrow y_h = y_2 = c_0 (x^2 + 1) + c_2 e^x$

/ /

$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$ حسب طريقة التخمين

$P_2(x) = x-1 \quad , P_1(x) = -x \quad , P_0(x) = 1$

نفترض $y = x$ تكون حلاً خاصاً اذا وفقط اذا كان:

$P_1(x) + xP_0(x) = 0$

$-x + x(1) = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0$

$y_1 = x$ حل خاص

نفترض $y = x^2$ تكون حلاً خاصاً اذا وفقط اذا كان:

$\frac{2!}{0!} P_2(x) + \frac{2!}{1!} x P_1(x) + \frac{2!}{2!} x^2 P_0(x) = 0$

$2(x-1) + 2x(-x) + x^2(1) = 2x - 2 - 2x^2 + x^2$

$= -x^2 + 2x - 2 \neq 0$

نفترض $y = e^{mx}$ تكون حل خاص اذا وفقط اذا كان:

$(x-1)m^2 - xm + 1 = 0$ بالتعويض عن y' بـ m

$m^2x - m^2 - xm + 1 = 0$

$-(m^2-1) + m^2x - xm = 0 \Rightarrow$

$-(m^2-1) + xm(m-1) = 0$

$-(m-1)(m+1) + xm(m-1) = 0$

$(m-1)[-m-1+xm] = 0$

اما $m-1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow y_2 = e^x$

أو $-m-1+xm = 0$

$m(x-1) = 1$

$m = \frac{1}{x-1}$ مرفوض

$y_h = A_1x + A_2e^x$

$y_p = y_1\int \frac{w_1}{w}\,dx + y_2\int \frac{w_2}{w}\,dx$

$y'' - \frac{x}{(x-1)}y' + \frac{1}{x-1}y = (x-1)e^x$.

Alamal

/ /

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & e^{x} \\ 1 & e^{x} \end{vmatrix} = xe^{x} - e^{x}$$
$$= e^{x}(x-1)$$

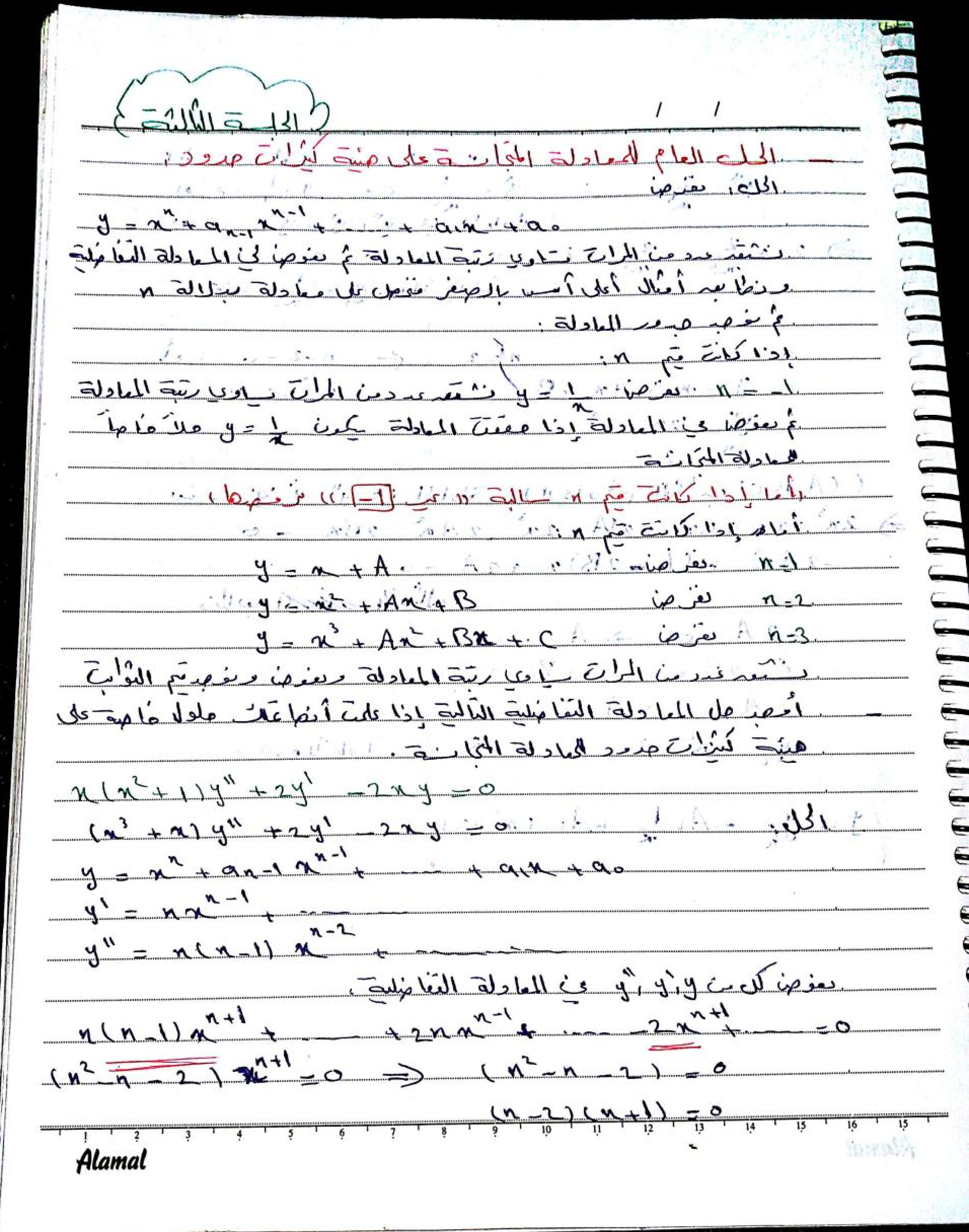
$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ (x-1)e^{x} & e^{x} \end{vmatrix} = -e^{2x}(x-1)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & (x-1)e^{x} \end{vmatrix} = xe^{x}(x-1)$$

$$y_p = x\int \frac{-e^{2x}(x-1)}{e^{x}(x-1)} + e^{x}\int \frac{xe^{x}(x-1)}{e^{x}(x-1)}$$

$$= x(-e^{x}) + e^{x}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$= xe^{x}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

$$\boxed{y = A_1 x + A_2 e^{x} + xe^{x}\left(\frac{x}{2} - 1\right)}$$



الحلقة الثالثة

/ /

- الحل العام للمعادلة المتجانسة على هيئة كثيرات حدود:

الحل: نفترض

$$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

نشتق عدد من المرات تساوي رتبة المعادلة ثم نعوض في المعادلة التفاضلية ونطابق أمثال أعلى أس بالصفر فنحصل على معادلة بدلالة n

ثم نوجد جذور المعادلة:

إذا كانت قيم n:

1- $n = -1$ نفترض $y = \frac{1}{x}$ نشتق عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة ثم نعوض في المعادلة إذا حققت المعادلة يكون $y = \frac{1}{x}$ حلاً خاصاً للمعادلة المتجانسة

(أما إذا كانت قيم n سالبة "أي غير -1" نرفضها.)

أما إذا كانت قيم n:

$n=1$ نفترض $y = x + A$

$n=2$ نفترض $y = x^2 + Ax + B$

$n=3$ نفترض $y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

نشتق عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة ونعوض ونوجد قيم الثوابت

- أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية إذا علمت أنها تقبل حلولاً خاصة على هيئة كثيرات حدود المعادلة المتجانسة.

$$x(x^2+1)y'' + 2y' - 2xy = 0$$

الحل: $(x^3+x)y'' + 2y' - 2xy = 0$

$$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$y' = nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

نعوض كل من y, y', y'' في المعادلة التفاضلية

$$n(n-1)x^{n+1} + \dots + 2nx^{n-1} + \dots - 2x^{n+1} + \dots = 0$$

$$(n^2 - n - 2)x^{n+1} = 0 \Rightarrow (n^2 - n - 2) = 0$$

$$(n-2)(n+1) = 0$$

إما $n+1=0 \Leftarrow n=-1$

نفرض $y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2} \Rightarrow y''=\frac{2}{x^3}$

نعوض y, y', y'' في المعادلة

$$\Rightarrow 2+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2}-2=0 \Rightarrow 0=0$$

واضح $y_1=\frac{1}{x}$ حلاً خاصاً.

أو: $n-2=0 \Leftarrow n=2$

نفرض أن:

$$y=x^2+Ax+B$$
$$y'=2x+A$$
$$y''=2$$

نعوض y, y', y'' في المعادلة (لإيجاد قيم الثوابت (A,B,C))

$$\Rightarrow 2x^3+2x+4x+2A-2x^3-2Ax^2-2Bx=0$$
$$-2Ax^2+(6-2B)x+2A=0$$

نطابق الأمثال

$$-2A=0 \Rightarrow A=0$$
$$6-2B=0 \Rightarrow B=3$$
$$2A=0 \Rightarrow A=0$$

وهو حلاً خاصاً

$$y_2=x^2+3$$

$$\boxed{y=y_h=A_1\frac{1}{x}+A_2(x^2+3)}$$

/ /

– أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$$

إذا علمت أن المعادلة المتجانسة المناظرة لها حل خاص على هيئة كثيرة حدود

– الحل :

$$(4x^2+4x+1)y'' + (-4x-2)y' + 4y = 0$$

$$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + __ + a_1x + a_0$$

$$y' = nx^{n-1} + ___$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + ___$$

نعوض بالمعادلة

$$4n(n-1)x^n + __ + 4nx^n + __ + 4x^n + __ = 0$$

$$(4n^2-4n)x^n - 4nx^n + 4x^n = 0$$

$$x^n(4n^2-4n-4n+4) = 0$$

$$4n^2 - 8n + 4 = 0$$

$$n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n-1)^2 = 0$$

$$n = 1$$

$$y = x + A \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'' = 0$$

$$\Rightarrow -4x - 2 + 4x + 4A = 0$$

$$-2 + 4A = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$y_1 = x + \frac{1}{2}$ حل خاص

لإيجاد الحل الخاص الثاني y_2 :

حسب [illegible]

$$y'' - \frac{2}{2x+1}y' + \frac{4}{(2x+1)^2}y = 0$$

$$y_h = y_1\left[\int \frac{C_1 e^{-\int P(x)dx}}{(y_1)^2}dx + C_2\right]$$

$$y_h = x + \frac{1}{2}\left[C_1\int \frac{e^{\int \frac{2}{2x+1}dx}}{(x+\frac{1}{2})^2}dx + C_2\right]$$

$$e^{\int \frac{2}{2x+1} dx} = e^{\ln(2x+1)} = 2x+1$$

$$y_h = x + \frac{1}{2} \left[C_1 \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + C_2 \right]$$

$$y_h = x + \frac{1}{2} \left[C_1 \ln(x^2+x+1) + C_2 \right]$$

$$y_h = (x + \tfrac{1}{2}) \ln(x^2+x+1) C_1 + (x + \tfrac{1}{2}) C_2$$

ايجاد y_p

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} = \cos x$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos x \cot x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cos x \cot x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x \cot x \end{vmatrix} = \cos x \cot x$$

$$y_p = 1 \int \frac{-\sin x \cos x \cot x}{\cos x} dx + \sin x \int \frac{\cos x \cot x}{\cos x} dx$$

$$= \int -\sin x \cot x \, dx + \sin x \int \cot x \, dx$$

$$= -\int \sin x \frac{\cos x}{\sin x} dx + \sin x \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= -\sin x + \sin x \ln(\sin x)$$

المعادلة التفاضلية التامة:

Example: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\sin x\, y'' + 3\cos x\, y' - 2\sin x\, y = 5\cos x$$

بعد التأكد من أنها تامة:

$\frac{d}{dx}(\sin x\, y')$ y'' [illegible] $y'' = y'$	$\sin x\, y'' + 3\cos x\, y' - 2\sin x\, y$ $\sin x\, y'' + \cos x\, y'$ بالطرح $0 + 2\cos x\, y' - 2\sin x\, y$
$\frac{d}{dx}(2\cos x\, y)$ $y' = y$	$2\cos x\, y' - 2\sin x\, y$ بالطرح $0 \quad - \quad 0$

∴ هي معادلة تامة:

(بمكاملة طرفي الحدود) $\sin x\, y' + 2\cos x\, y = \int 5\cos x\, dx + C$

وهي معادلة تكامل أولي:

$$\sin x\, y' + 2\cos x\, y = 5\sin x + C$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى (نضرب بعامل التكامل M)

$$\frac{1}{\sin x}: \quad y' + 2\frac{\cos x}{\sin x}\, y = 5 + \frac{C}{\sin x} \quad \text{———} (*)$$

$$M = e^{2\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{\ln(\sin x)^2} = \sin^2 x$$

$$[\sin^2 x\, y]' = 5\sin^2 x + C\sin x \qquad \left(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$\int \Rightarrow \sin^2 x\, y = 5\int \sin^2 x\, dx + C\int \sin x\, dx + C_1$$

Alamal

$$\sin^2 x\, y = 5\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right] - C\cos x + C_1$$

$$\sin^2 x\, y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}\sin 2x - C\cos x + C_1$$

$$y = \underbrace{\frac{5x}{2\sin^2 x} - \frac{5}{4}\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}}_{y_p} - \underbrace{C\frac{\cos x}{\sin^2 x} + C_1\frac{1}{\sin^2 x}}_{y_h}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x^2+2)y'' + 4xy' + 2y = \sin x$$

بعد التأكد من أنها تامة:

$\frac{d}{dx}(x^2+2)y'$	$(x^2+2)y'' + 4xy' + 2y$
	$(x^2+2)y'' + 2xy'$
	$-$ بالطرح
	$0 + 2xy' + 2y$
$\frac{d}{dx}(2x)y$	$2xy' + 2y$
	$-$ بالطرح
	$0 + 0$

فالمعادلة تامة.

$$(x^2+2)y' + 2xy = -\cos x + C_2$$

وهي معادلة تكامل أولي:

$$y' + \frac{2x}{x^2+2}y = \frac{-\cos x}{x^2+2} + \frac{C_2}{x^2+2}$$

$$M = e^{\int \frac{2x}{x^2+2}dx} = e^{\ln(x^2+2)} = (x^2+2)$$

$$[(x^2+2)y]' = -\cos x + C \quad \Rightarrow$$

Alamal

$(x^2+2)\,y = -\sin x + Cx + C_1$

$$y = \underbrace{\frac{-\sin x}{x^2+2}}_{y_p} + \underbrace{C\,\frac{x}{x^2+2} + C_1\,\frac{1}{x^2+2}}_{y_h}$$

« Note »

- إذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل

$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = F(x)$

وإذا كان y_1, y_2 حلان خاصان للمعادلة

« y_1, y_2 حلول خاصة للمعادلة الغير متجانسة »

فإن:

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\,z$$

- طريقة:

« homework »

$y'' + \tan y' = \cos x \cdot \cot x$

ط $_1$)

$z = y' \Rightarrow z' = y''$

$z' \;-\; z$

ط $_2$) $y_1 = 1$ حلاً خاصاً للمعادلة المتجانسة (وهذا يعني أنها تحقق المعادلة

حتى يكون حل خاص ⟸ ليس فيه y ... لا يوجد y في المعادلة

ط $_3$) $y_1 = \sin x$

$y' + f(x)\,y = g(x)$

الحل = الإرادة

$y'' + \tan x\, y' = \cos x \cot x$

الحل:

ط:

$z = y' \Rightarrow z' = y''$

$z' + \tan x \cdot z = \cos x \cdot \cot x$

$\mu = e^{\int \tan x\, dx} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{-\ln \cos x} = e^{\ln \frac{1}{\cos x}}$

$= \frac{1}{\cos x}$

نضرب الطرفين بـ μ ونضعها في الشكل:

$\left[\frac{1}{\cos x} z\right]' = \cot x \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \cdot z = \int \cot x\, dx$

$\frac{1}{\cos x} z = \ln \sin x + c$

$y' = z = \cos x \ln \sin x + c \cdot \cos x$

$y = \int \cos x \cdot \ln \sin x\, dx + c \cdot \sin x + c_1$

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$

$\int \cos x \ln \sin x\, dx = \int \ln t \cdot dt = t \cdot \ln t - t$

$u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t}$

$dv = dt \Rightarrow v = t$

Alamal

$(\quad) y'' + (\quad) y' = 0$

$y_1 = 1$

$$y = \underbrace{\sin x \ln \sin x - \sin x}_{y_p} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2}_{y_h}$$

:2 ط

$$y'' + \tan x \, y' = \cos x \cdot \cot x$$

ناخذ المعادلة المتجانسة المناظرة

$$y'' + \tan x \, y' = 0$$

$y_1 = 1$ حلاً لها

$y' = 0$

$y'' = 0$ حسب ليوفيل استغرادسكي

$$y_h = y_1 \left[\int \frac{c \, e^{-\int P(x)\,dx}}{(y_1)^2} \, dx + c_2 \right]$$

$$e^{-\int \tan x} = e^{+\ln \cos x} = \cos x$$

$$y_h = 1 \cdot \left[c_1 \int \frac{\cos x}{1} \, dx + c_2 \right]$$

$$y_h = c_1 \sin x + c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة المتجانسة

ثم نحسب y_p لاگرانج [ايجاد y_p قبل صفحتين (->)]

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

$$-\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} \cos x = 0$$

$0 = 0$

$y_1 = \sin x \Leftarrow$ حسب ليوفيل استغرادسكي

Alamal

$y = x$
$y = x^2$
$1 \cancel{x} = ?$

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$(\sin x - \cos x) y'' - 2\sin x\, y' + (\cos x + \sin x) y = (1 - \sin x) e^x$

الحل: نأخذ المعادلة المتجانسة

$(\sin x - \cos x) y'' - 2\sin x\, y' + (\cos x + \sin x) y = 0$

حسب طرق التفتيش

$P_1 + x P_0 = 0$

$\times\ y = x$

نفرض $y = e^{mx}$ تكون حلاً خاصاً

$(\sin x - \cos x) m^2 - 2\sin x\, m + (\cos x + \sin x) = 0$

$\sin x\, m^2 - \cos x\, m^2 - 2\sin x\, m + \cos x + \sin x = 0$

$\sin x (m^2 - 2m + 1) - \cos x (m^2 - 1) = 0$

$\sin x (m - 1)^2 - \cos x (m-1)(m+1) = 0$

$(m-1)[\sin x (m-1) - \cos x (m+1)] = 0$

إما: $m - 1 = 0 \Leftarrow m = 1$

ومنه $y_1 = e^x$ حلاً خاصاً

أو: $m \sin x - \sin x - m\cos x - \cos x = 0$

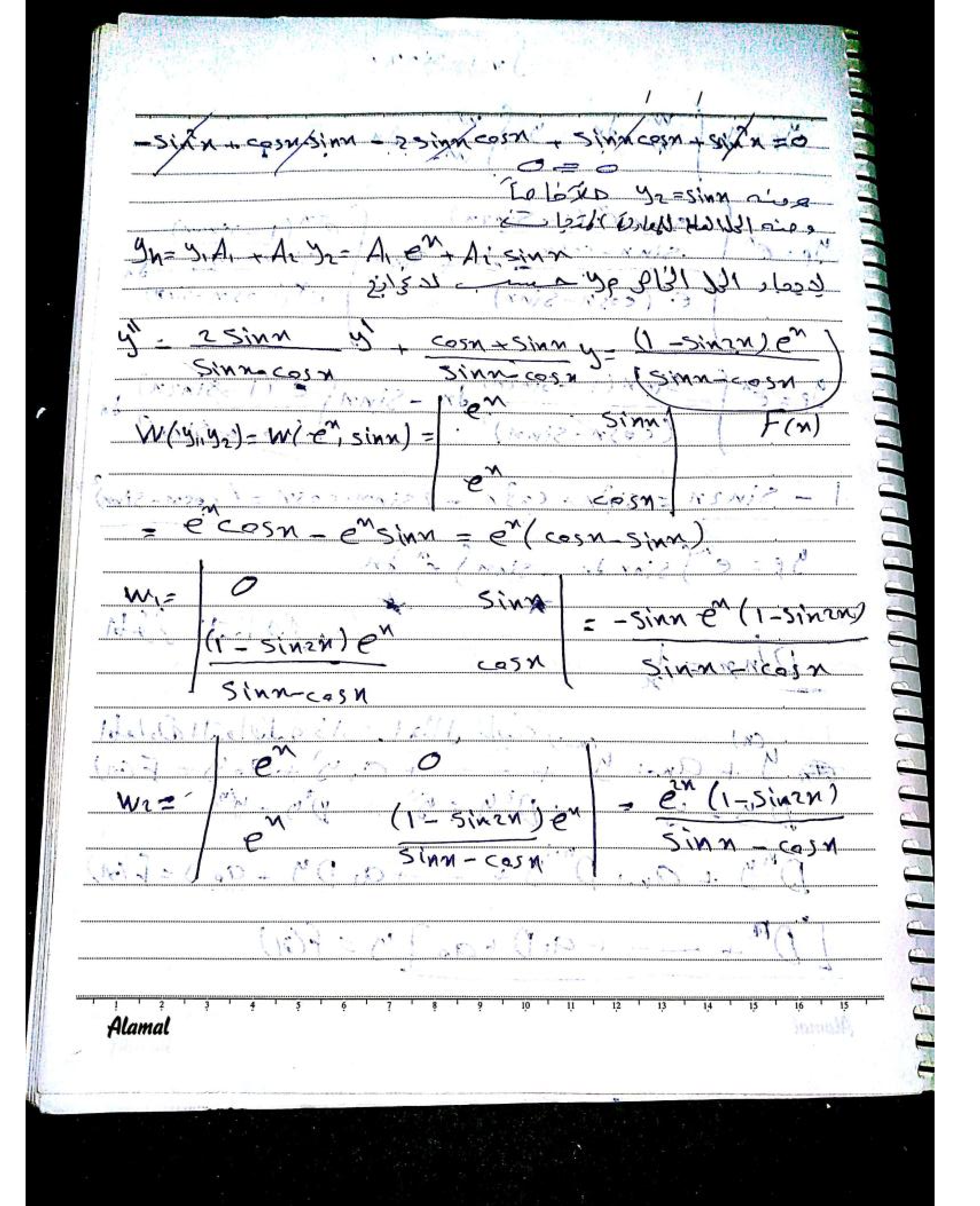
$m(\sin x - \cos x) = \sin x + \cos x \Rightarrow m = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ مرفوض لأنه متعلق بـ x

(٤) نفرض $y = \sin x$ يكون حلاً خاصاً إذا حقق المعادلة

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

نعوض y, y', y'' في المعادلة



$$-\sin^2 x + \cos x \sin x - 2\sin x\cos x + \sin x\cos x + \sin^2 x = 0$$

$$0 = 0$$

ومنه $y_2 = \sin x$ حلاً لها

ومنه الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y_h = y_1 A_1 + A_2 y_2 = A_1 e^x + A_2 \sin x$$

لإيجاد الحل الخاص نعوض حسب لاغرانج

$$y'' - \frac{2\sin x}{\sin x - \cos x} y' + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} y = \underbrace{\frac{(1-\sin 2x)e^x}{\sin x - \cos x}}_{F(x)}$$

$$W(y_1, y_2) = W(e^x, \sin x) = \begin{vmatrix} e^x & \sin x \\ e^x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$= e^x\cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{(1-\sin 2x)e^x}{\sin x - \cos x} & \cos x \end{vmatrix} = \frac{-\sin x\, e^x (1-\sin 2x)}{\sin x - \cos x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{(1-\sin 2x)e^x}{\sin x - \cos x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}(1-\sin 2x)}{\sin x - \cos x}$$

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}$$

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w}\,dx + y_2 \int \frac{w_2}{w}\,dx$$

$$y_p = e^x \int \frac{\dfrac{-\sin x\, e^x (1-\sin 2x)}{\sin x - \cos x}}{e^x(\cos x - \sin x)}\,dx + \sin x \int \frac{\dfrac{e^{2x}(1-\sin 2x)}{\sin x - \cos x}}{e^x(\cos x - \sin x)}\,dx$$

$$y_p = e^x \int \frac{\sin x (1-\sin 2x)}{(\cos x - \sin x)^2}\,dx - \sin x \int \frac{e^x(1-\sin 2x)}{(\cos x - \sin x)^2}\,dx$$

$$1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = (\cos x - \sin x)^2$$

$$y_p = e^x \int \sin x\,dx - \sin x \int e^x\,dx$$

★————★ المؤثر التفاضلي :

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

المعادلة التفاضلية ذات اعمال ثابتة

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \text{——} + a_1 y' + a_0 y = F(x)$$

$$Dy = y' \quad , \quad D^2 y = y'' \quad , \quad D^n y = y^{(n)}$$

$$D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \text{——} + a_1 D y + a_0 y = F(x)$$

$$\left[D^n + \text{——} + a_1 D + a_0\right] y = F(x)$$

Alamal

$\Rightarrow \Phi(D)\, y = F(x)$

1) ملاحظة

$$\Phi(D).\, e^{mx} = \Phi(m)\, e^{mx}$$

مثال:

$$[D^3 + 5D^2 + 6]\, e^{2x} = [2^3 + 5.2^2 + 6]\, e^{2x} = 34\, e^{2x}$$

مثال ط2

$$2D: \{D^3 e^{2x} + 5D^2 e^{2x} + 6 e^{2x}\}$$

$$[8 e^{2x} + 5.4 e^{2x} + 6 e^{2x}] = 34 e^{2x}$$

2) ملاحظة

$$\Phi(D^2)\, {\cos \atop \sin}\, mx = \Phi(-m^2)\, {\cos \atop \sin}\, mx$$

مثال:

$$[D^4 + 6D^3 + 2D^2 + D]\, \sin x$$

$$[D^2 D^2 + 6D.D^2 + 2D^2 + D]\, \sin x \qquad m = 1,\ m^2 = 1$$

$$-m^2 = -1 \Rightarrow D^2 = -1$$

$$[1 - 6D - 2 + D]\, \sin x$$

$$[-5D - 1]\, \sin x = \{-5\cos x - \sin x\}$$

Alamal

~~$D\cdot D^2 = D^2\cdot D$~~ ~~$aD = Da$~~

3) $\phi(D^2)\ {}^{sh}_{ch}\, mx = \phi(m^2)\cdot {}^{sh}_{ch}\, mx$

4) خاصة الإزاحة الأسية

$$\phi(D)\cdot e^{mx}\cdot V(x) = e^{mx}\cdot \phi(D+m)\cdot V(x)$$

5)

*) $\phi(D)\cdot x\cdot V(x) = x\cdot \phi(D)\cdot V(x) + \phi'(D)\, V(x)$

*) $\phi(D)\cdot x^2\cdot V(x) = x^2\cdot \phi(D)\, V(x) + 2x\, \phi'(D)\cdot V(x) + \phi''(D)\, V(x)$

$$\phi(D)\cdot x^3\cdot V(x) = x^3 \phi(D)\cdot V(x) + 3x^2 \phi'(D)\, V(x) + 3x\, \phi''(D)\cdot V(x) + \phi'''(D)\cdot V(x)$$

			1			
مطابقة تربيعية	1	2	1			
(3 مطابقة تكعيبية	1	3	3	1		
(4	1	4	6	4	1	
(5	1	5	10	10	5	1

Alamal

مثال: أوجد بطريقتين:

$$(D^2+D+1)\,x.e^x$$

ط١: طريقة الإزاحة الأسية

$$= e^x\left[(D+1)^2+(D+1)+1\right]x$$

$$= e^x\left\{D^2+3D+3\right\}x = e^x\left[0+3+3x\right]$$

$$= e^x\left\{3+3x\right\}$$

$$\phi(D).x.V(x) = x\,\phi(D).V(x)+\phi'(D).V(x)$$

ط٢

$$\left[D^2+D+1\right]x\,e^x = x\left[D^2+D+1\right]e^x+\left[2D+1\right]e^x$$

$$= x\left[3\right]e^x+\left[3\right]e^x$$

$$= e^x\left[3x+3\right]$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\Delta = b^2-4a.c \quad , \sqrt{\Delta}>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\sqrt{\Delta}=0$$

$$x_1=x_2=$$

$$\sqrt{\Delta}<0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Alamal

$$-x^2+(2+i)x+(i-1)=0$$

$\Delta = (2+i)^2 \cdot 4(i-1)$

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)=0$$

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=\frac{-D}{A}$$

مثال: $x^2+ix+1=0$

$$\Delta = 1-4=-3=3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=i\sqrt{3}$$

$$x_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوجد جذور المعادلة

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=+1$$

$x=1$

$$1-3+3-1=0$$
$$0=0$$

$x_1=1$ جذر للمعادلة

$(x-1)\,[$ معادلة من الدرجة الثانية $]=0$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 2x + 1 \\ x-1 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \\ \hline & -2x^2 + 3x - 1 \\ & \pm 2x^2 \mp 2x \\ \hline & x - 1 \\ & x - 1 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$(x-1)[x^2-2x+1]=0$

$(x-1)(x-1)^2=0$

$(x-1)^3=0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1$

Alamal

- المؤثر التفاضلي العكسي:

مثلا $\frac{1}{D}x = \frac{x^2}{2}$

المعادلة التفاضلية ذات أمثال ثابتة وهي:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$$

$$\phi(D)y = F(x)$$

نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\phi(D)}$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)}F(x)$$

1) اذا كانت $F(x)$ من الشكل:

$$\frac{1}{\phi(D)}e^{mx} = \frac{1}{\phi(m)}e^{mx} \quad ; \quad \phi(m) \neq 0$$

اذا كانت $\phi(m) = 0$:

(الاشتقاق فقط في الحوال الأساسية "L")

$$\frac{1}{\phi(D)}e^{mx} = \frac{x^L}{\phi^{(L)}(m)}e^{mx} \quad ; \quad \phi^{(L)}(m) \neq 0$$

مثال: أوجد الحل الخاص من المؤثر التفاضلي العكسي

$$y'' + 2y' + y = e^x$$

$$[D^2 + 2D + 1]y = e^x$$

نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D^2+2D+1}$

$$y_p = \frac{1}{D^2+2D+1}e^x = \frac{1}{4}e^x$$

مثال 2: أوجد الحل الخاص

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} e^x$$

نلاحظ أن:

$$\phi(1) = 0$$

$$\phi(D) = D^2 - 2D + 1$$

$$\phi'(D) = 2D - 2$$

$$\phi'(1) = 2 - 2 = 0$$

$$\phi''(D) = 2 \neq 0$$

$$y_p = \frac{x^2}{2} e^x$$

---

2) $; a \neq m$

$$\frac{1}{D - m} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} ax = \frac{1}{m^2 + a^2}\left[\begin{matrix} a\sin \\ -a\cos\end{matrix} ax - m \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} ax\right]$$

مثال:

$$\frac{1}{D - 3} \cos 2x = \frac{1}{4 + 9}\left[2\sin 2x - 3\cos 2x\right]$$

$$\frac{1}{D + 2} \sin 3x = \frac{1}{4 + 9}\left[-3\cos + 2\sin 3x\right]$$

3)

$$\frac{1}{D - m} \begin{matrix}ch\\ sh\end{matrix} ax = \frac{1}{a^2 - m^2}\left[a \begin{matrix}sh\\ ch\end{matrix} ax - m \begin{matrix}ch\\ sh\end{matrix} ax\right]$$

4)

$$\frac{1}{\phi(D^2)} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} mx = \frac{1}{\phi(-m^2)} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} mx \quad ; \phi(-m^2) \neq 0$$

مثال:

$$\frac{1}{D^3+D^2+D+5}\sin x$$

نعوض $D^2=-1$

$$=\frac{1}{-D-1+D+5}\sin x=\frac{1}{4}\sin x$$

$$\frac{1}{D^2+D+5}\cos x=\frac{1}{-1+D+5}\cos x$$

$$=\frac{1}{D+4}\cos x=\frac{1}{16+1}\left[\sin x+4\cos x\right]$$

5)

$$\frac{1}{\phi(D^2)}\frac{Sh}{Ch}mx=\frac{1}{\phi(m^2)}\frac{Sh}{Ch}mx\ ;\ \phi(m^2)\neq 0$$

$$e^{iax}=\cos ax+i\sin ax$$

$$e^{a+ix}=e^{a}\cdot e^{ix}=e^{a}\left[\cos x+i\sin x\right]$$

$$Im\ e^{iax}=\sin ax$$ (i) يعني

$$Re\ e^{iax}=\cos ax$$

إذا كانت $\phi(-m^2)=0$

$$\frac{1}{\phi(D^2)}\frac{\cos}{\sin}mx=\frac{Re}{Im}\left[\frac{1}{\phi(D)}e^{imx}\right]$$

مثال:

تمارين $\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax$

$\phi(-m^2) = 0$

$= Re \frac{1}{D^2+a^2} e^{iax}$

$\phi(D) = D^2 + a^2$

$\phi'(D) = 2D$

$\phi'(ia) = 2ai \neq 0$

$= Re \frac{x}{2ai} e^{iax}$

$= \frac{x}{2a} Re \frac{1}{i} e^{iax}$

$= \frac{x}{2a} Re \frac{-i}{1} [\cos ax + i\sin ax]$

$= \frac{x}{2a} Re [-i\cos ax + \sin ax]$

$= \boxed{\frac{x}{2a}\sin ax}$

$\frac{1}{D^2+a^2}\sin ax = -\frac{x}{2a}\cos ax$

أوجد الحل الخاص وفق المؤثر التفاضلي العكسي:

$y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' = \sin x$

$[D^4 + D^3 + D^2 + D]y = \sin x$

نؤثر على:

$y_p = \frac{1}{D^4+D^3+D^2+D}\sin x$

$\phi(-m^2) = 0$

$y_p = Im \frac{1}{D^4+D^3+D^2+D} e^{xi}$

$y_p = Im \frac{x}{-2-2i} e^{ix}$

$\phi(D) = D^4 + D^3 + D^2 + D$

$\phi'(D) = 4D^3 + 3D^2 + 2D + 1$

$\phi'(i) = -4i - 3 + 2i + 1$

$\phi'(i) = -2 - 2i \neq 0$

$y_p = \frac{x}{-2} Im \frac{1}{1+i} e^{ix}$

نضرب بـ مرافق المقام)

/ /

$$y_p = \frac{-x}{2} Im \frac{1-i}{2} [\cos x + i\sin x]$$

$$y_p = \frac{-x}{4} Im [\cos x + i\sin x - i\cos x + \sin x]$$

$$y_p = \frac{-x}{4} [\sin x - \cos x]$$

$$\frac{1}{D^2 - a^2} \, Sh\, ax \qquad \phi(m^2) = 0$$

$$\frac{1}{D^2 - a^2} \left[\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right] = \frac{1}{2} \frac{1}{D^2 - a^2} e^{ax} - \frac{1}{2} \frac{1}{D^2 - a^2} e^{-ax}$$

$$y_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} e^{ax} - \frac{1}{2} \frac{x}{-2a} e^{-ax} \qquad \phi(D) = D^2 - a^2$$

$$\phi'(D) = 2D$$

$$y_p = \frac{x}{2a} \left[\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right] \qquad \phi'(a) = 2a$$

$$\phi'(-a) = -2a$$

$$y_p = \frac{x}{2a} \, ch\, ax$$

ϕ ———————— ϕ

قاعدة:

$$\frac{1}{\phi(D)} e^{mx} \cdot V(x) = e^{mx} \frac{1}{\phi(D+m)} \cdot V(x)$$

قاعدة:

$$\frac{1}{\phi(D)} x \cdot V(x) = \left[x \cdot \frac{1}{\phi(D)} V(x) - \frac{1}{\phi(D)} \phi'(D) \frac{1}{\phi(D)} V(x)\right]$$

/ /

$$\frac{1}{D^2+2}\, e^x \sin x$$

$V(x)$

خاصية الزحزحة.

$$= e^x \frac{1}{(D+1)^2+2} \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2+2D+3} \sin x = e^x \frac{1}{-1+2D+3} \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{2D+2} \sin x = \frac{e^x}{2} \frac{1}{D+1} \sin x \longrightarrow -1+1 = ن$$

$$= \frac{e^x}{2} \left[\frac{1}{1+1} (-\cos x + \sin x) \right] \qquad \phi(1) = 0$$

$$= \frac{e^x}{4} [-\cos x + \sin x]$$

✡ ——————— ✡

خاصية:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-(D^2+D+1)}$$

$$1 - D$$

Alamal

$D^4 + 6D^3 + 9D^2$ $\qquad$ $(D^2 + 1)^2 + (D^2)^2 \,] \, x^2$ (b, a, 1, 1)

الحالة السادسة

ملاحظة:

$$\frac{1}{1-D} x^2 = [1 + D + D^2 + \dots + D^n]\, x^2$$

$D^2 \,]\, x^2$

$D^3 \,]\, x^2 = 0$

مثال:

$$\frac{1}{1-D} x^2 = [1 + D + D^2 + D^3]\, x^2$$

$$= x^2 + 2x + 2 + 0$$

$$\frac{1}{D^2+3D+5} x^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{1+\frac{1}{5}(D^2+3D)} x^2$$

$$= \frac{1}{5}\left[1 - \frac{1}{5}(D^2+3D) + \frac{1}{25}(D^2+3D)^2\right] x^2$$

$$= \frac{1}{5}\left[x^2 - \frac{1}{2}[2+6x] + \frac{1}{25}[18]\right]$$

$\frac{1}{D^2+1} x \sin x$: homework

تمرين: أوجد بنفسك؛

ط1 حسب الزمرة الاسبق؛

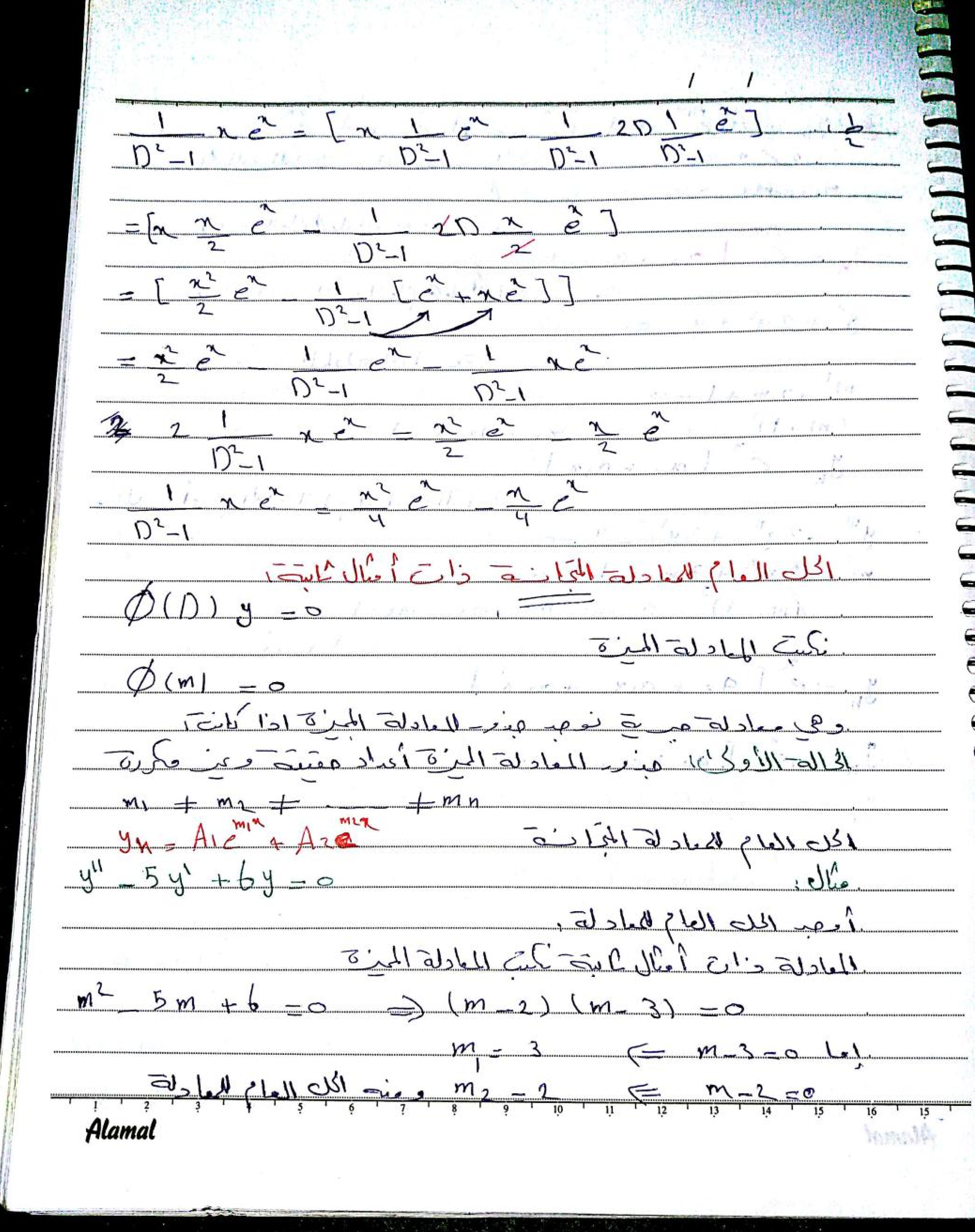
$$\frac{1}{D^2-1} x e^x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{(D+1)^2-1} x = e^x \frac{1}{D^2+2D} x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D+2} \frac{x^2}{2} = \frac{e^x}{2} \frac{1}{D+2} x^2$$

$$= \frac{e^x}{4} \frac{1}{1+\frac{D}{2}} x^2 = \frac{e^x}{4}\left[1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4}\right] x^2$$

$$= \frac{e^x}{4}\left[x^2 - x + \frac{1}{2}\right]$$



ط٢

$$\frac{1}{D^2-1} x e^x = \left[x \frac{1}{D^2-1} e^x - \frac{1}{D^2-1} 2D \frac{1}{D^2-1} e^x\right]$$

$$= \left[x \frac{x}{2} e^x - \frac{1}{D^2-1} 2D \frac{x}{2} e^x\right]$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{D^2-1} \left[e^x + x e^x\right]\right]$$

$$= \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{D^2-1} e^x - \frac{1}{D^2-1} x e^x$$

$$2 \frac{1}{D^2-1} x e^x = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{x}{2} e^x$$

$$\frac{1}{D^2-1} x e^x = \frac{x^2}{4} e^x - \frac{x}{4} e^x$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة ذات أمثال ثابتة

$$\phi(D)\, y = 0$$

نكتب المعادلة المميزة

$$\phi(m) = 0$$

وهي معادلة جبرية نوجد جذور المعادلة المميزة اذا كانت

الحالة الأولى: جذور المعادلة المميزة أعداد حقيقية وغير مكررة

$$m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة $y_h = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x}$

مثال: $y'' - 5y' + 6y = 0$

أوجد الحل العام للمعادلة.

المعادلة ذات أمثال ثابتة نكتب المعادلة المميزة

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow (m-2)(m-3) = 0$$

إما $m - 3 = 0 \Rightarrow m_1 = 3$

$m - 2 = 0 \Rightarrow m_2 = 2$ ومنه الحل العام للمعادلة

/ /

$$y = y_h = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} = A_1 e^{3x} + A_2 e^{2x}$$

الحالة الثانية: اذا كانت الجذور حقيقية ومكررة n مرة:

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{(n)} = M$$

الحل العام للمعادلة يعطى بالمستوى

$$y_h = e^{Mx}\left[a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-1} x^{(n-1)}\right]$$ كثير حدود أعلى درجة

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

نكتب المعادلة المتجانسة

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -1$$

$$y_h = e^{-x}\left[a_0 + a_1 x\right]$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$

$$(m-1)^3 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

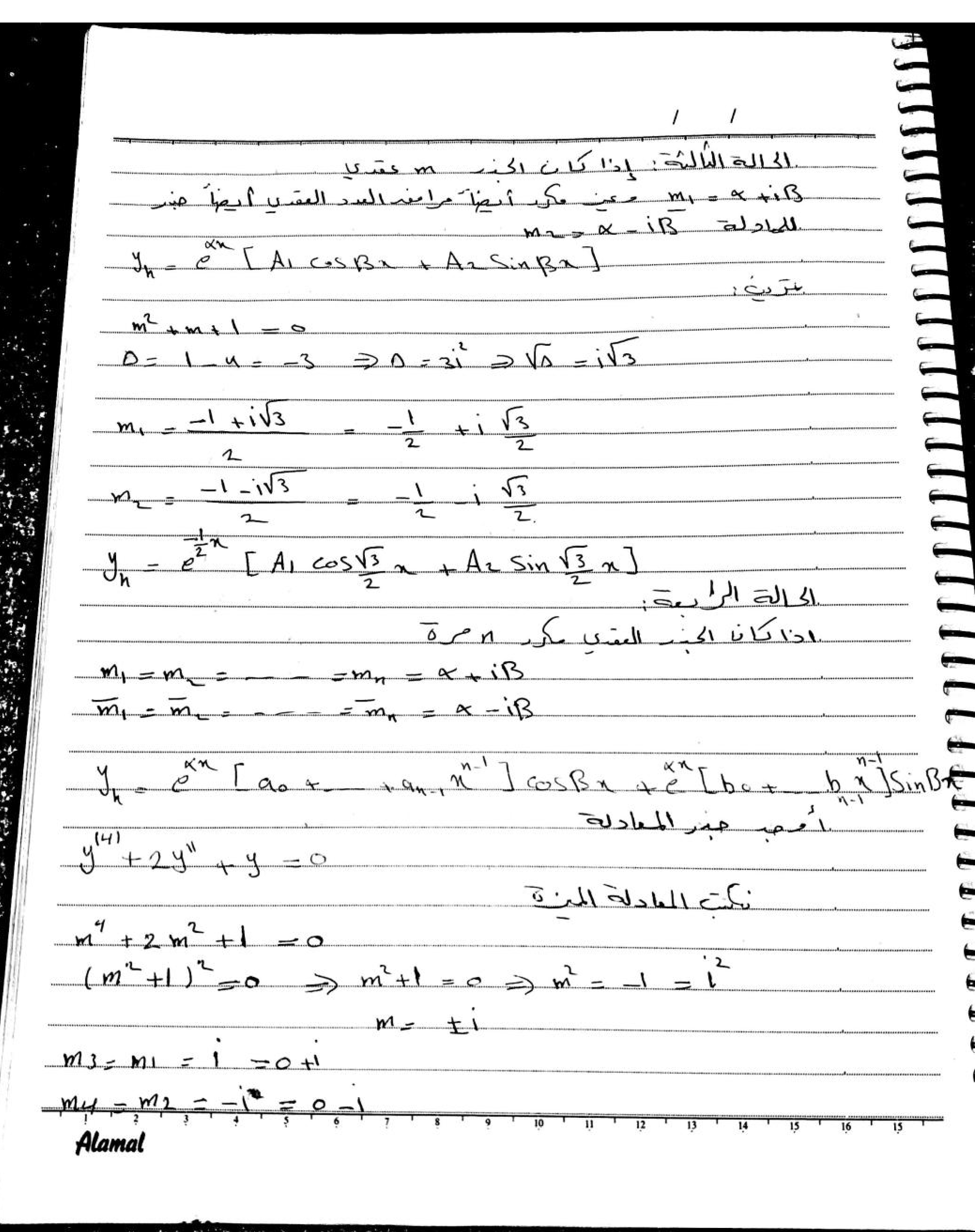
$$= 1 + 0i$$

$$y_h = e^{x}\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right]$$

$$y_h = e^{x}\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right]$$

$$y_h = e^{x}\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right] \cos 0x$$

$$+ e^{x}\left[b_0 + \ldots\right] \sin 0x$$



/ /

الحالة الثالثة: إذا كان الجذر m عقدي

فإن $m_1 = \alpha + i\beta$ جذر فيكون أيضاً مرافق العدد العقدي أيضاً جذر

للمعادلة $m_2 = \alpha - i\beta$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x\right]$$

تمرين:

$$m^2 + m + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \Delta = 3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$$

$$m_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$$

الحالة الرابعة:

اذا كان الجذر العقدي مكرر n مرة

$$m_1 = m_2 = \text{---} = m_n = \alpha + i\beta$$

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \text{---} = \bar{m}_n = \alpha - i\beta$$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[a_0 + \text{---} + a_{n-1}x^{n-1}\right]\cos\beta x + e^{\alpha x}\left[b_0 + \text{---}\, b_{n-1}x^{n-1}\right]\sin\beta x$$

أوجد جذر المعادلة

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

نكتب المعادلة المميزة

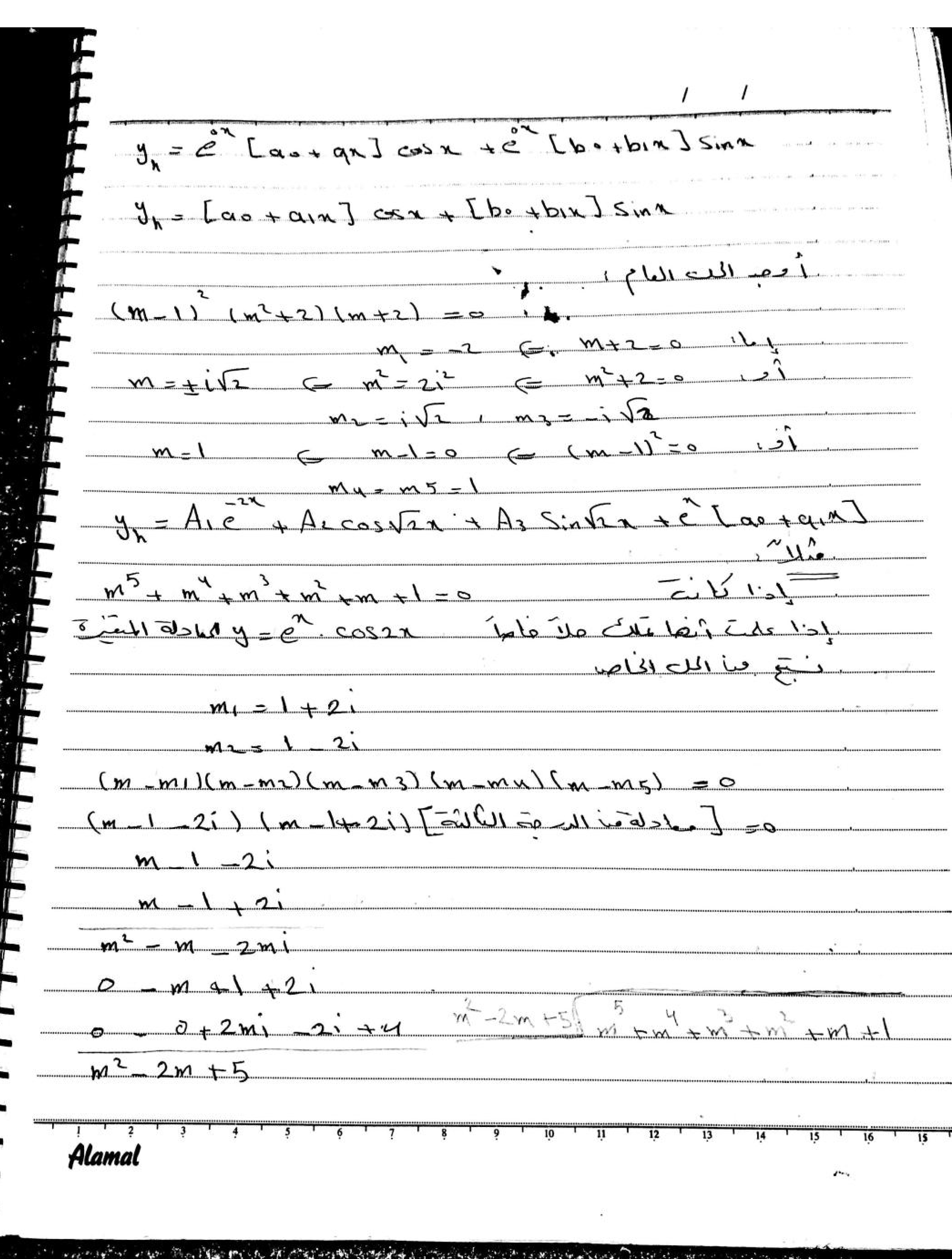
$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0$$

$$(m^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 = i^2$$

$$m = \pm i$$

$$m_3 = m_1 = i = 0 + i$$

$$m_4 = m_2 = -i = 0 - i$$



/ /

$y_h = e^{0x}[a_0 + a_1 x]\cos x + e^{0x}[b_0 + b_1 x]\sin x$

$y_h = [a_0 + a_1 x]\cos x + [b_0 + b_1 x]\sin x$

أوجد الحل العام :

$(m-1)^2 (m^2+2)(m+2) = 0$

إما $m+2=0 \Leftarrow m_1 = -2$

أو $m^2+2=0 \Leftarrow m^2 = 2i^2 \Leftarrow m = \pm i\sqrt{2}$

$m_2 = i\sqrt{2} \; , \; m_3 = -i\sqrt{2}$

أو $(m-1)^2 = 0 \Leftarrow m-1=0 \Leftarrow m=1$

$m_4 = m_5 = 1$

$y_h = A_1 e^{-2x} + A_2 \cos\sqrt{2}x + A_3 \sin\sqrt{2}x + e^{x}[a_0 + a_1 x]$

مثال :

إذا كانت $m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = 0$

إذا علمت أنها تمتلك حلاً خاصاً $y = e^{x}\cos 2x$ للمعادلة المميزة

نستنتج منا الحل الخاص

$m_1 = 1 + 2i$

$m_2 = 1 - 2i$

$(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)(m-m_4)(m-m_5) = 0$

$(m-1-2i)(m-1+2i)$ [معادلة من الدرجة الثالثة] $= 0$

$m - 1 - 2i$

$m - 1 + 2i$

$m^2 - m - 2mi$

$0 - m + 1 + 2i$

$0 - 0 + 2mi - 2i + 4$

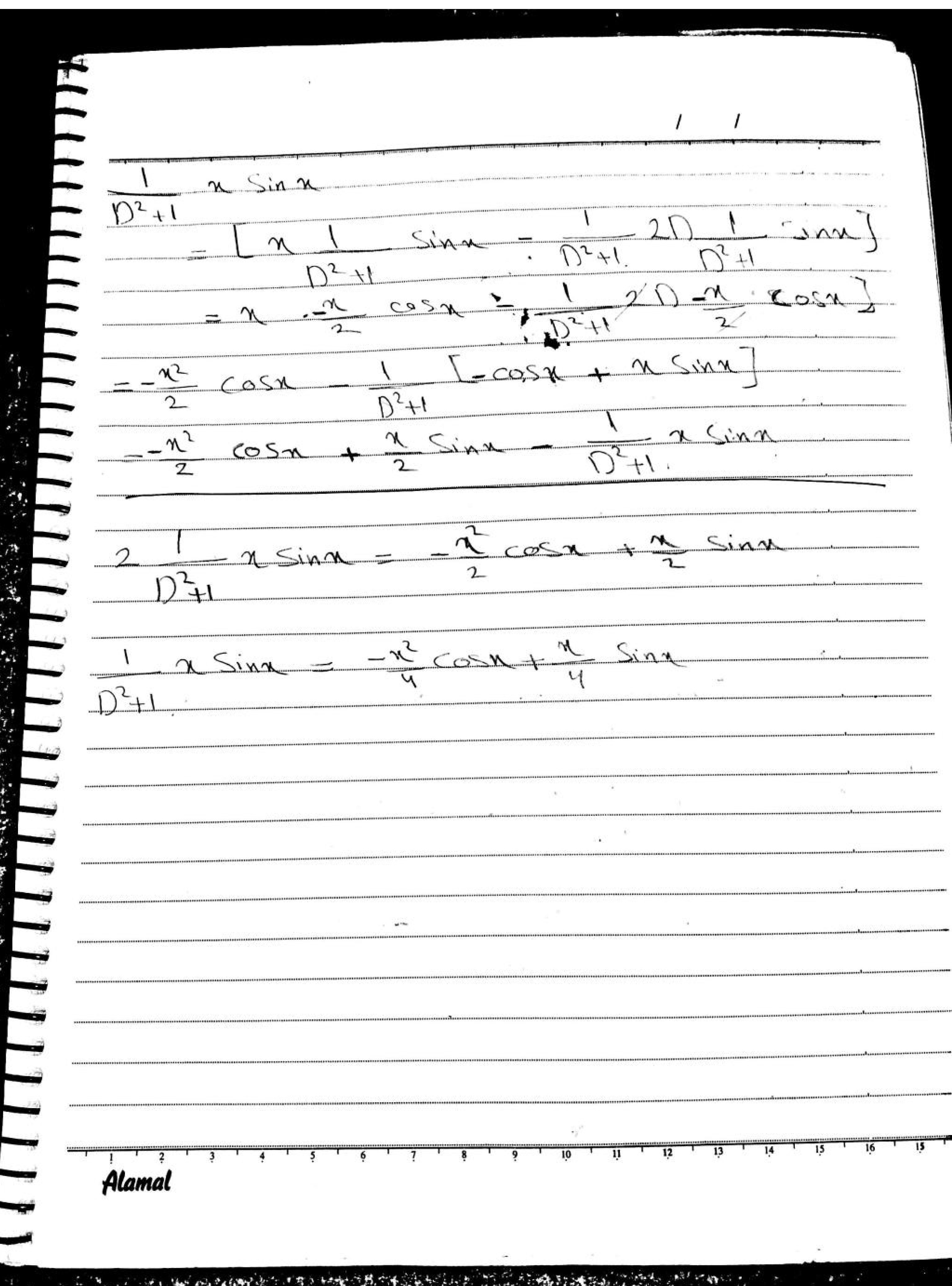
$m^2 - 2m + 5$

$m^2 - 2m + 5 \,\overline{)\, m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1}$

Alamal

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{-\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x}$$



/ /

$$\frac{1}{D^2+1}\, x \sin x$$

$$= \left[x \frac{1}{D^2+1} \sin x - \frac{1}{D^2+1} 2D \frac{1}{D^2+1} \sin x \right]$$

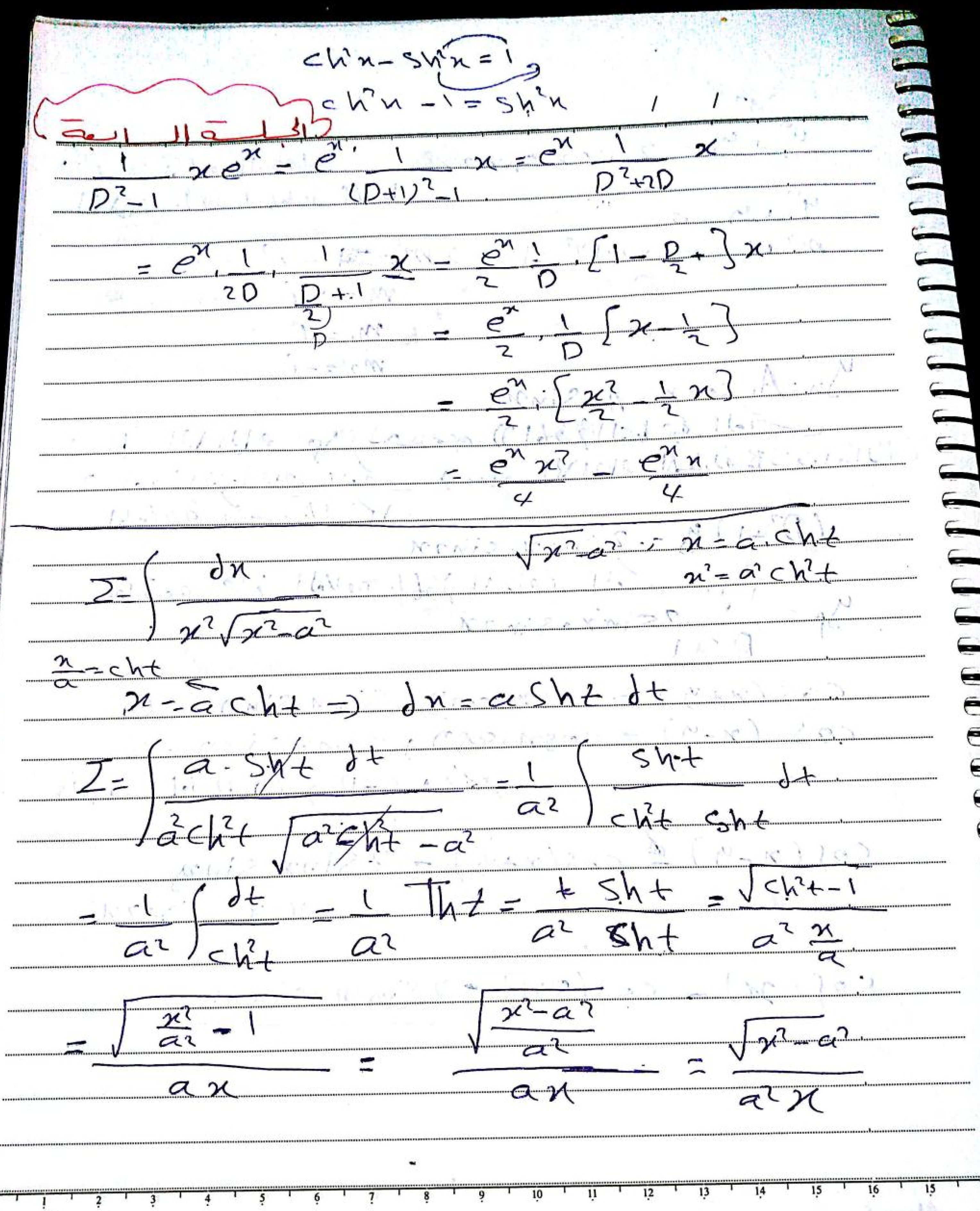
$$= x \cdot \frac{-x}{2} \cos x - \frac{1}{D^2+1} 2D \frac{-x}{2} \cos x \Big]$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cos x - \frac{1}{D^2+1} \left[-\cos x + x \sin x \right]$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cos x + \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{D^2+1} x \sin x$$

$$2 \frac{1}{D^2+1} x \sin x = -\frac{x^2}{2} \cos x + \frac{x}{2} \sin x$$

$$\frac{1}{D^2+1} x \sin x = -\frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \sin x$$



$$ch^2x - sh^2x = 1$$

$$ch^2x - 1 = sh^2x$$

الحالة الرابعة

$$\frac{1}{D^2-1}\, x e^x = e^x \frac{1}{(D+1)^2-1}\, x = e^x \frac{1}{D^2+2D}\, x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{2D} \cdot \frac{1}{\frac{D}{2}+1}\, x = \frac{e^x}{2} \frac{1}{D} \cdot \left[1 - \frac{D}{2} + \dots\right] x$$

$$= \frac{e^x}{2} \cdot \frac{1}{D} \left\{x - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{e^x}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right]$$

$$= \frac{e^x x^2}{4} - \frac{e^x x}{4}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \sqrt{x^2-a^2} \,;\; x = a\,ch\,t, \quad x^2 = a^2 ch^2 t$$

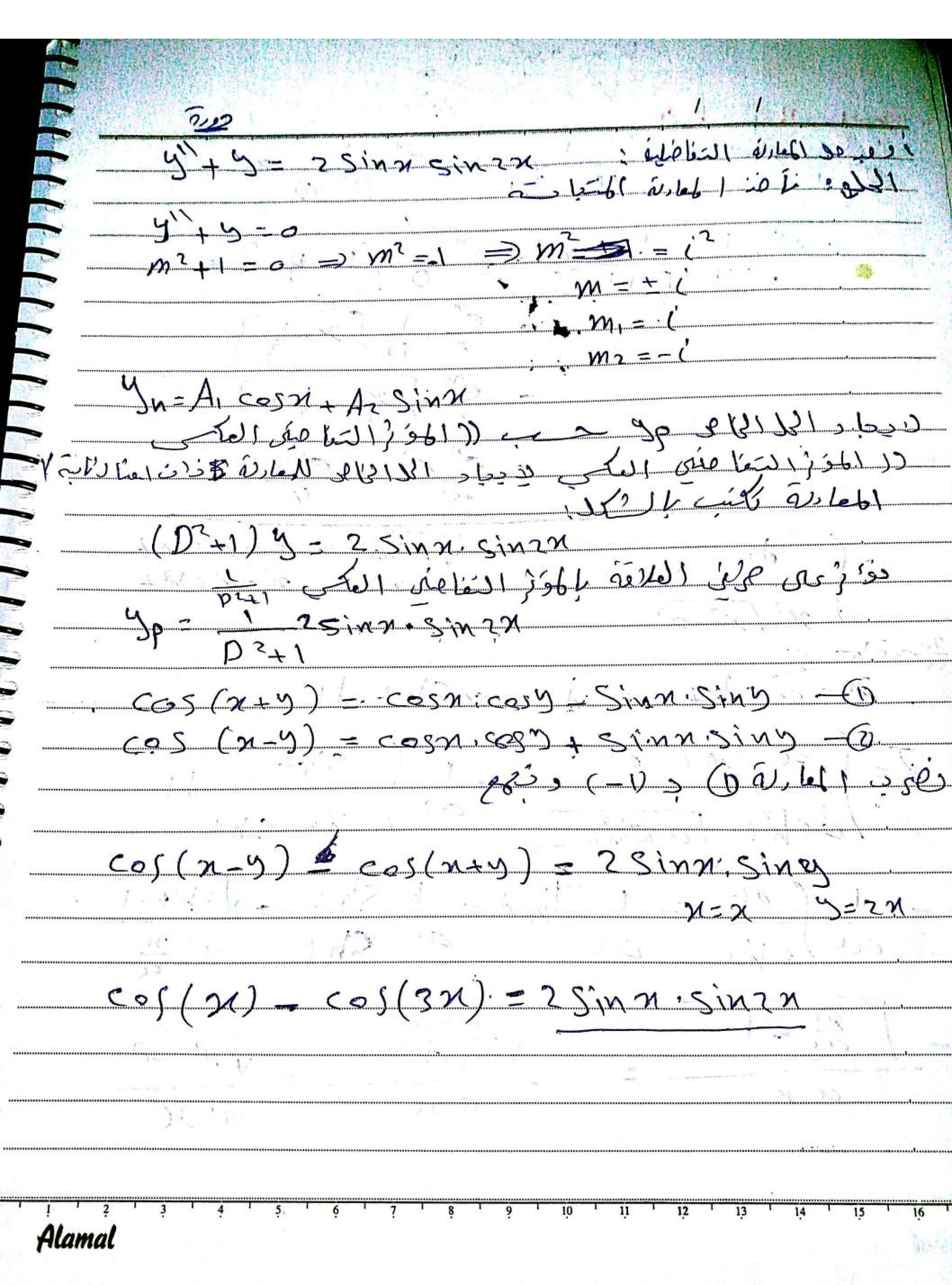
$$\frac{x}{a} = ch\,t$$

$$x = a\,ch\,t \Rightarrow dx = a\,sh\,t\,dt$$

$$I = \int \frac{a \cdot sh\,t\,dt}{a^2 ch^2 t \sqrt{a^2 ch^2 t - a^2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{sh\,t}{ch^2 t\; sh\,t}\, dt$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{ch^2 t} = \frac{1}{a^2}\, th\,t = \frac{sh\,t}{a^2\, ch\,t} = \frac{\sqrt{ch^2 t - 1}}{a^2 \frac{x}{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{a x} = \frac{\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}}{a x} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x}$$



صورة

أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y'' + y = 2\sin x \sin 2x$$

الحل: نأخذ المعادلة المتجانسة

$$y'' + y = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = i^2$$

$$m = \pm i$$

$$m_1 = i$$

$$m_2 = -i$$

$$y_h = A_1 \cos x + A_2 \sin x$$

لإيجاد الحل الخاص من حسب المؤثر التفاضلي العكسي

إن المؤثر التفاضلي العكسي لإيجاد الحل الخاص للمعادلة ذات المعاملات الثابتة

المعادلة تكتب بالشكل:

$$(D^2+1)\, y = 2\sin x \cdot \sin 2x$$

نؤثر على طرفي العلاقة بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D^2+1}$

$$y_p = \frac{1}{D^2+1} 2\sin x \cdot \sin 2x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad —(1)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \quad —(2)$$

نضرب المعادلة (1) بـ (-1) ونجمع

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \cdot \sin y$$

$$x = x \qquad y = 2x$$

$$\cos(x) - \cos(3x) = 2\sin x \cdot \sin 2x$$

/ /

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}(\cos x - \cos 3x)$$

$$I_1 = \frac{1}{D^2+1}\cos x \qquad \phi(-m^2) = 0$$

$$I_1 = Re\,\frac{1}{D^2+1}e^{ix} \qquad \phi'(D) = 2D$$

$$\phi'(i) = 2i \neq 0$$

$$I_1 = Re\,\frac{x}{2i}e^{ix}$$

$$I_1 = \frac{x}{2}\,Re\,-i(\cos x + i\sin x)$$

$$I_1 = \frac{x}{2}\sin x$$

$$y_p = \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{-8}\cos 3x$$

$$y = y_h + y_p$$

/ /

الحل الخاص المقترح: y_p

1) إذا كانت $F(x)$ من الشكل

$$F(x) = A e^{\beta x}$$

$$y_p = B e^{\beta x}$$

مثال:

$$F = 3 e^{2x}$$

الحل $y_p = A e^{2x}$

2) إذا كانت $F(x)$ من الشكل

$$F(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

$$y_p = A_1 \cos \beta x + B A_2 \sin \beta x$$

مثال:

$$F(x) = 3 \sin 2x$$

$$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$$

3) إذا كانت $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ___ + a_1 x + a_0$

$$y_p = b_n x^n + ______ + b_1 x + b_0$$

مثال:

$$F(x) = x^3$$

$$y_p = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

/ /

4) إذا كانت

$$F(x) = A \cdot \sinh \beta x + B \cosh \beta x$$

$$y_p = A_1 \sinh \beta x + A_2 \cosh \beta x$$

5) إذا كانت

$$F(x) = e^{\alpha x}\{A \cos \beta x + B \sin \beta x\}$$

$$y_p = e^{\alpha x}\{A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x\}$$

مثال:

$$F(x) = e^{2x} \cdot \sin x$$

$$y_p = e^{2x}\{A \sin x + B \cos x\}$$

6) إذا كانت

$$F(x) = e^{\alpha x}\{a_n x^n + \text{—} + a_1 x + a_0\}$$

$$y_p = e^{\alpha x}\{b_n x^n + \text{—} + b_1 x + b_0\}$$

مثال:

$$F(x) = x^2 e^x$$

$$y_p = e^x\{a_2 x^2 + a_1 x + a_0\}$$

7) إذا كانت

$$F(x) = e^{\alpha x}\{a_n x^n + \text{—} + a_1 x + a_0\} \sin \beta x + e^{\alpha x}\{b_n x^n + \text{—} + b_0\} \cos \beta x$$

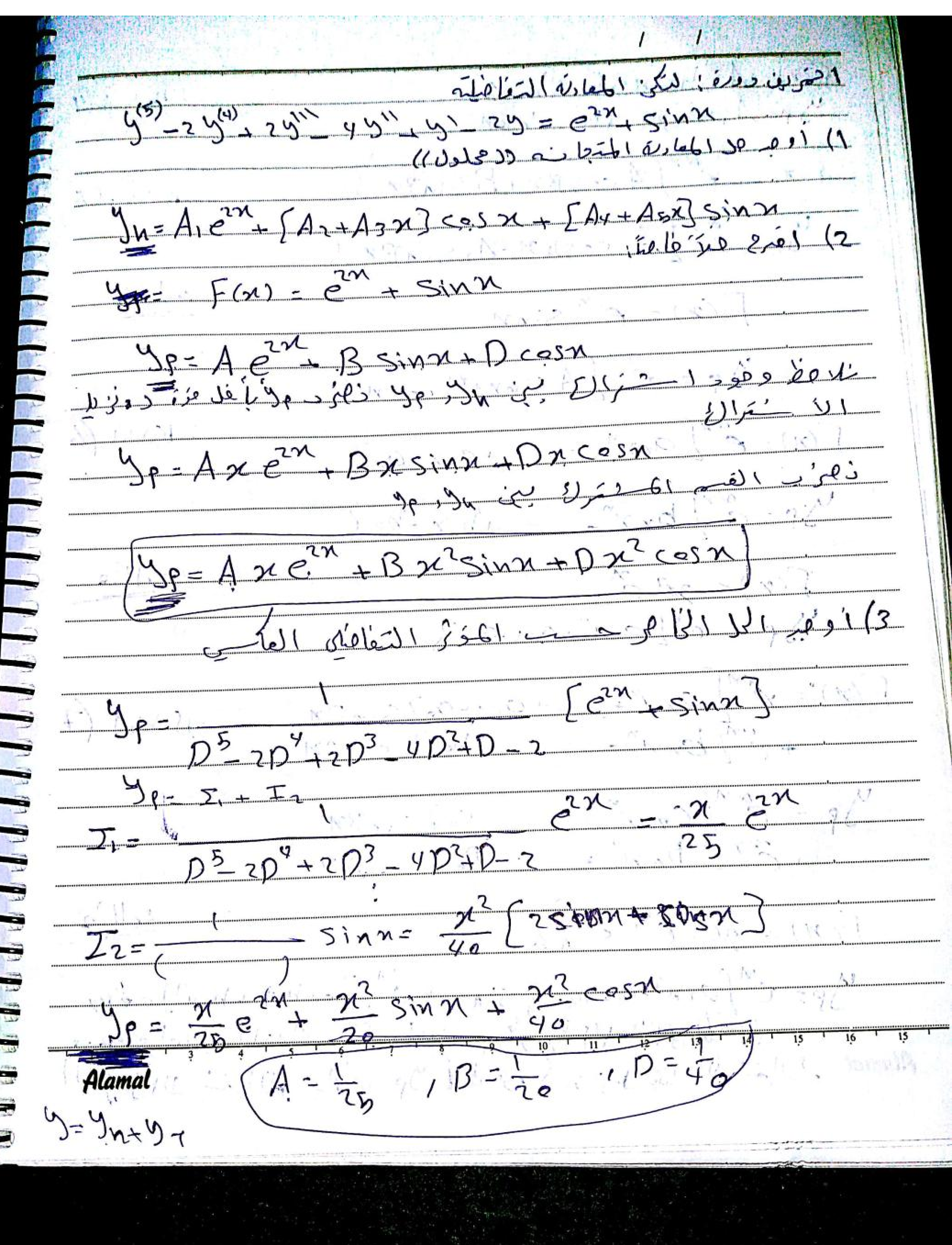
$$y_p = e^{\alpha x}\{C_n x^n + \text{—} + C_0\} \sin \beta x + e^{\alpha x}\{D_n x^n + \text{—} + D_0\} \cos \beta x$$

مثال:

$$F(x) = x^2 \cdot e^x \sin x$$

$$y_p = e^x\{a_2 x^2 + a_1 x + a_0\} \sin x + e^x\{b_0 + b_1 x + b_2 x^2\} \cos x$$

((مع مراعاة الاشتراك بين y_h و y_p الحل الخاص المقترح فإذا الاشتراك يضرب y_p بأعلى قوة لـ x لنزيل هذا الاشتراك))



تمرين دورة: لتكن المعادلة التفاضلية

$$y^{(5)}-2y^{(4)}+2y'''-4y''+y'-2y=e^{2x}+\sin x$$

1) أوجد حل المعادلة المتجانسة ((محلول))

$$y_h=A_1e^{2x}+[A_2+A_3x]\cos x+[A_4+A_5x]\sin x$$

2) اقترح حلاً خاصاً

$$F(x)=e^{2x}+\sin x$$

$$y_p=Ae^{2x}+B\sin x+D\cos x$$

نلاحظ وجود اشتراك بين y_h و y_p نضرب y_p بأقل قوة حتى يزول الاشتراك

$$y_p=Axe^{2x}+Bx\sin x+Dx\cos x$$

نضرب القسم المشترك بين y_h و y_p

$$\boxed{y_p=Axe^{2x}+Bx^2\sin x+Dx^2\cos x}$$

3) أوجد الحل الخاص حسب المؤثر التفاضلي العكسي

$$y_p=\frac{1}{D^5-2D^4+2D^3-4D^2+D-2}\left[e^{2x}+\sin x\right]$$

$$y_p=I_1+I_2$$

$$I_1=\frac{1}{D^5-2D^4+2D^3-4D^2+D-2}e^{2x}=\frac{x}{25}e^{2x}$$

$$I_2=\frac{1}{(\quad)}\sin x=\frac{x^2}{40}\left[2\sin x+\cos x\right]$$

$$y_p=\frac{x}{25}e^{2x}+\frac{x^2}{20}\sin x+\frac{x^2}{40}\cos x$$

$$A=\frac{1}{25},\quad B=\frac{1}{20},\quad D=\frac{1}{40}$$

$$y=y_h+y_p$$

إذا كانت المعادلة

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \text{——} + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = F(x)$$

(احذف المشتقة من المرتبة (n-1))

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int a_{n-1}(x)\, dx} \cdot z$$

نشتق ونعوض في المعادلة

((تحويل المعادلة من امثال متغيرة إلى معادلة ذات امثال ثابتة))

تمرين دورة :

$$x^2 y'' - 4x y' + (6 - x^2)\, y = x^4 \sin x$$

1) احذف المشتقة الأولى

2) أوجد الحل العام للمعادلة الناتجة , الحل العام

أمثال أول مشتقة سالب (1)

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \left(\frac{6}{x^2} - 1\right) y = x^2 \sin x$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)\, dx} \cdot z = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{-4}{x} dx} \cdot z = e^{+2\ln x} \cdot z$$

$$y = x^2 \cdot z \Rightarrow y' = 2x \cdot z + x^2 z'$$

$$y'' = 2z + 2xz' + 2xz' + x^2 z'' = 2z + 4xz' + x^2 z''$$

نعوض y, y', y'' في المعادلة

$$\Rightarrow 2z + 4xz' + x^2 z'' - 8z - 4xz' + 6z - x^2 z = x^2 \sin x$$

$$x^2 z'' - x^2 z = x^2 \sin x \Rightarrow$$

$$\boxed{z'' - z = \sin x}$$

معادلة ذات امثال ثابتة

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$m_1 = 1,\ m_2 = -1 \Rightarrow z_h = A_1 e^{x} + A_2 e^{-x}$$

/ /

$Z_p = \frac{1}{D^2-1} \sin x = -\frac{1}{2} \sin x$ الحل العام للمعادلة الناتجة

$Z = Z_h + Z_p = A_1 e^{x} + A_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x \rightarrow$ الحل العام للمعادلة

$y = x^2 Z = x^2 \left(A_1 e^{x} + A_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x \right)$

$Z = (a)^{\frac{1}{n}}$ $\quad Z^4 - 5 = 0$

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

$Z^4 = 5$

$Z = (5)^{\frac{1}{4}}$

Alamal

$32 - 32 + 16 - 16 + 2 - 2 \; (m=2)$

$= 0$

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية حسب المؤثر العكسي :

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = e^{2x} + \sin x$$

الحل، المعادلة التفاضلية تكتب بالشكل :

$$[D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2]y = e^{2x} + \sin x$$

نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر التفاضلي العكسي :

$$y_p = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2}[e^{2x} + \sin x]$$

$$I_1 = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2} e^{2x}$$

$\phi(2) = 0$

$\phi'(D) = 5D^4 - 8D^3 + 6D^2 - 8D + 1$

$\phi'(2) = 80 - 64 + 24 - 16 + 1$

$\phi'(2) = 25 \neq 0$

$$I_1 = \frac{x}{25} e^{2x}$$

$$I_2 = \frac{1}{D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 4D^2 + D - 2} \sin x$$

$D^2 = -1$

$+D - 2 - 2D + 4 + D - 2 = 0$

$\phi(-m^2) = 0$

$\phi'(i) = 5 + 8i - 6 - 8i + 1$

$= 0$

$$I_2 = Im \frac{1}{D^4 ____} e^{ix}$$

$$\phi''(D) = 20D^3 - 24D^2 + 12D - 8$$

$$\phi''(i) = -20i + 24 + 12i - 8$$

$$= 16 - 8i + 0$$

$$I_2 = Im \frac{x^2}{16-8i} e^{ix}$$

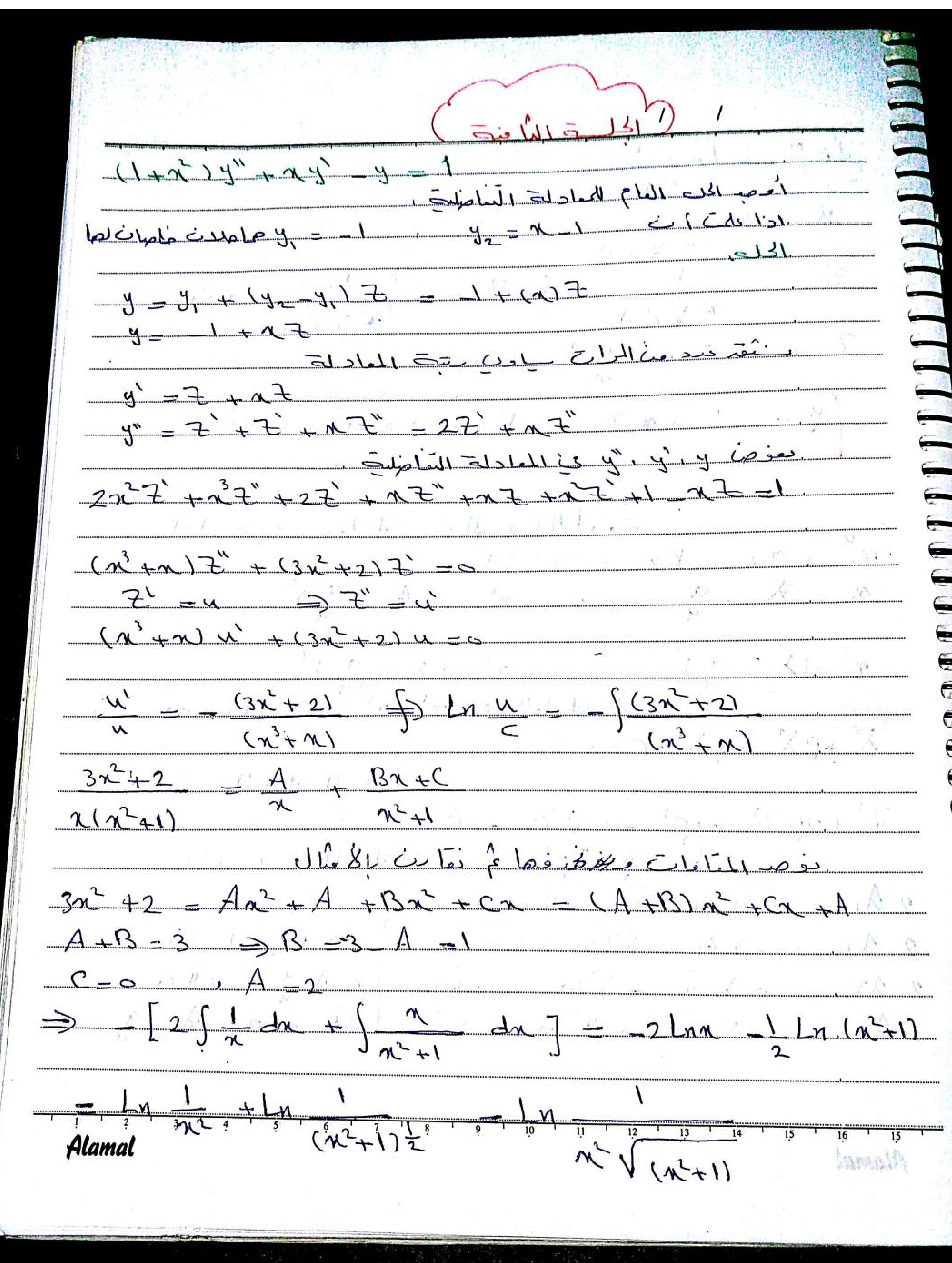
$$I_2 = \frac{x^2}{8} Im \frac{2+i}{4+1} [\cos x + i \sin x]$$

$$I_2 = \frac{x^2}{40} Im [2\cos x + 2i\sin x + i\cos x - \sin x]$$

$$I_2 = \frac{x^2}{40} [2\sin x + \cos x]$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{x^2}{20} \sin x + \frac{x^2}{40} \cos x$$

Alamal



1 / الجلسة الثامنة

$$(1+x^2)y'' + xy' - y = 1$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية ، إذا علمت أن $y_1 = -1$ ، $y_2 = x - 1$ حلان خاصان لها

الحل

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)z = -1 + (x)z$$

$$y = -1 + xz$$

نشتق عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة

$$y' = z + xz'$$

$$y'' = z' + z' + xz'' = 2z' + xz''$$

نعوض y , y' , y'' في المعادلة التفاضلية

$$2x^2z' + x^3z'' + 2z' + xz'' + xz + x^2z' + 1 - xz = 1$$

$$(x^3+x)z'' + (3x^2+2)z' = 0$$

$$z' = u \Rightarrow z'' = u'$$

$$(x^3+x)u' + (3x^2+2)u = 0$$

$$\frac{u'}{u} = -\frac{(3x^2+2)}{(x^3+x)} \Rightarrow \ln\frac{u}{c} = -\int\frac{(3x^2+2)}{(x^3+x)}$$

$$\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

نوحد المقامات ونختزلها ثم نقارن بالأمثال

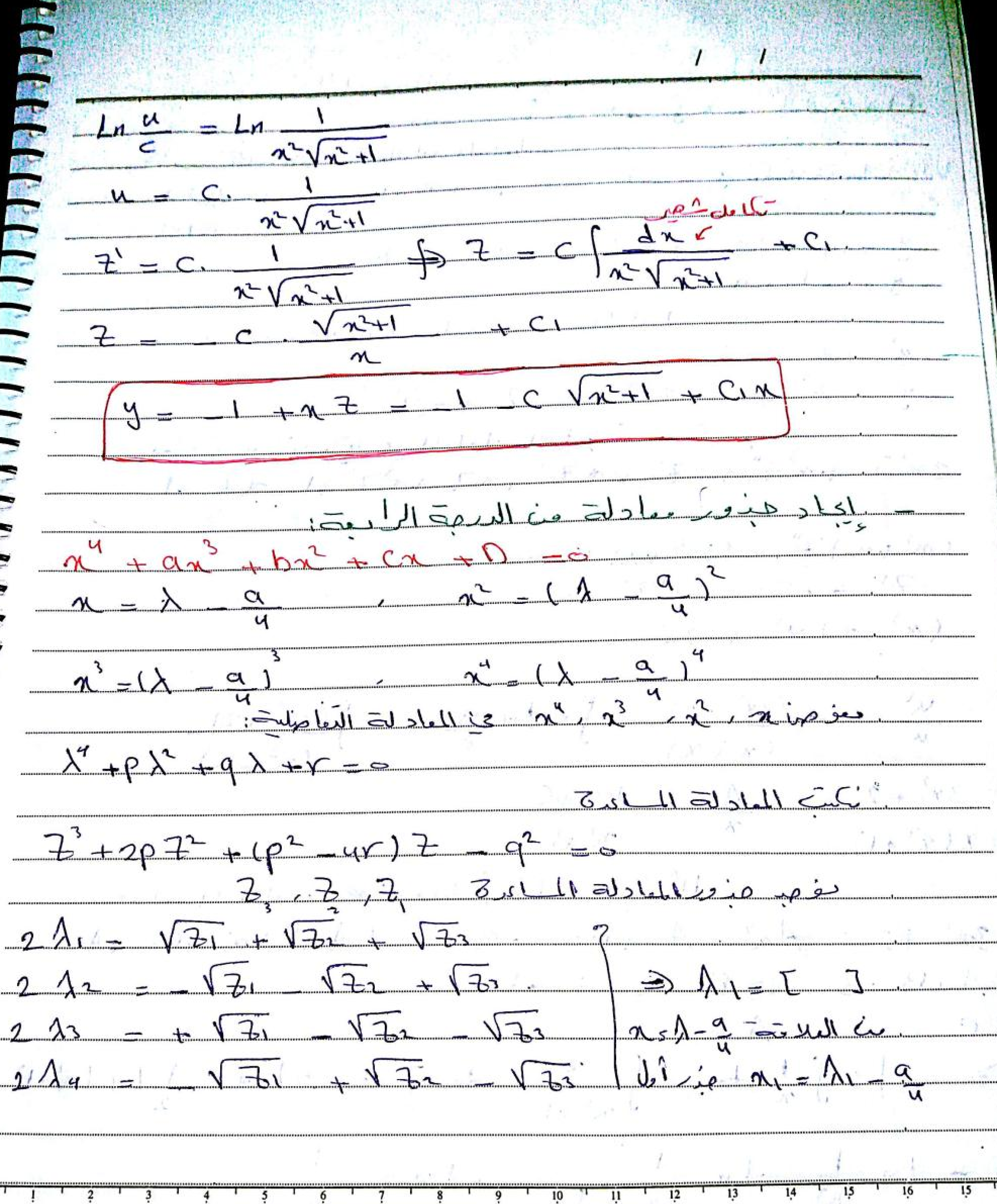
$$3x^2+2 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$A + B = 3 \Rightarrow B = 3 - A = 1$$

$$C = 0 \quad , \quad A = 2$$

$$\Rightarrow -\left[2\int\frac{1}{x}dx + \int\frac{x}{x^2+1}dx\right] = -2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$= \ln\frac{1}{x^2} + \ln\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \ln\frac{1}{x^2\sqrt{(x^2+1)}}$$



/ /

$$\ln \frac{u}{c} = \ln \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$u = c \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

تكامل شهير

$$z' = c \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow z = c\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} + c_1$$

$$z = -c\,\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c_1$$

$$\boxed{y = -1 + xz = -1 - c\sqrt{x^2+1} + c_1 x}$$

- إيجاد جذور معادلة من الدرجة الرابعة:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + D = 0$$

$x = \lambda - \frac{a}{4}$, $x^2 = (\lambda - \frac{a}{4})^2$

$x^3 = (\lambda - \frac{a}{4})^3$, $x^4 = (\lambda - \frac{a}{4})^4$

نعوض x ، x^2 ، x^3 ، x^4 في المعادلة التفاضلية:

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

نكتب المعادلة المساعدة

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$$

نفرض جذور المعادلة المساعدة z_1, z_2, z_3

$$2\lambda_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$
$$2\lambda_2 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$
$$2\lambda_3 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$
$$2\lambda_4 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = [\quad]$

من العلاقة $x = \lambda - \frac{a}{4}$

نجد أولاً $x_1 = \lambda_1 - \frac{a}{4}$

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$$

نكتب المعادلة المميزة

$$m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m^4 + 2m^2 + 1 - 2m(m^2+1) = 0$$

$$(m^2+1)^2 - 2m(m^2+1) = 0$$

$$(m^2+1)\left[\underbrace{m^2+1-2m}_{(m-1)^2}\right] = 0$$

إما $m^2+1 = 0 \Rightarrow m^2 = i^2 \Rightarrow m = \pm i$

$m_1 = i \quad , \quad m_2 = -i$

أو $(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_3 = m_4 = 1$

$$y_h = A_1 \cos x + A_2 \sin x + e^{x}[a_0 + a_1 x]$$

أوجد جذر المعادلة —

$Z = a \rightarrow$ مقدار ثابت

$$Z^n + a = 0 \Rightarrow Z^n = -a \Rightarrow Z = (-a)^{\frac{1}{n}}$$

$$(-a)^{\frac{1}{n}} = (|-a|)^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{2\pi k + \theta}{n}\right) + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$

نوجد θ

$$-a = |-a|\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$$

/ /

أوجد حل المعادلة: $m^4 - 1 = 0$

$(m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0 \Rightarrow m_1 = 1 \ , m_2 = -1$

$m_3 = i \ , m_4 = -i$

$m^4 - 1 = 0 \Rightarrow m^4 = 1 \Rightarrow m = (1)^{\frac{1}{4}}$

$(1)^{\frac{1}{4}} = 1 \left[\cos \frac{2\pi k + \theta}{4} + i \sin \frac{2\pi k + \theta}{4} \right] \ ; k = 0, 1, 2, 3$

$1 = 1 \left[\cos \theta + i \sin \theta \right] \Rightarrow \theta = 0$ $\quad (\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi)$

$* \ (1)^{\frac{1}{4}} = \left[\cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4} \right] \ ; k = 0, 1, 2, 3$

إذا كان $k = 0$

$m_1 = 1$

$m_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ $\quad k = 1$

$m_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ $\quad k = 2$

$m_4 = -i$

/ /

$y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$ دورة 16/15

ن 1

$m^4 + 4m^3 + 10m^2 + 12m + 5 = 0$

$m^4 + 10m^2 + 5 + 4m(m^2+3) = 0$

$12 \times m = \lambda - 1$, $10 \times m^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$4 \times m^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$

$1 \times m^4 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$

نعوض m^4, m^3, m^2, m في المعادلة

$\Rightarrow \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$

$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 12\lambda - 4$

$10\lambda^2 - 20\lambda + 10$

$12\lambda - 12 + 5 = 0$

$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0$ $\boxed{m = \lambda - 1}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -1$

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda^2 = -4 = 4i^2 \Rightarrow \lambda_3 = 2i$

$\lambda_4 = -2i$

$m_3 = 2i - 1 = -1 + 2i$

$m_4 = -2i - 1 = -1 - 2i$

$y_h = e^{-x}[a_0 + a_1 x] + e^{-x}[a_2 \cos 2x + a_3 \sin 2x]$

Alamal

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$$

$$\cos \frac{9\pi}{4} =$$

1) نطرح $\frac{9\pi}{4} - \pi$ ✗ $\frac{5\pi}{4}$ غير صحيحة ⇒ 2) 3) نطرح 2π

$$\frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2 زوجي لا تغير الاشارة

$$\sin \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} + \pi = -1$$

فردي تغير الاشارة

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i\, f(z_0)$$

z_0 نقطة شاذة

$$|z| = 1$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$